

Harald Wirnsberger

# GOCE Gravitationsfeldbestimmung: Analyse kinematischer Orbits mit Variationsgleichungen

MASTERARBEIT

zur Erlangung des akademischen Grades

Diplom-Ingenieur/in

Masterstudium Geomatics Science



Technische Universität Graz

Institut für theoretische Geodäsie und Satellitengeodäsie

Prüfer: Univ.-Prof. Dr.-Ing. Torsten Mayer-Gürr

Betreuer: Dipl.-Ing. Dr.-Ing. Oliver Baur

Sankt Georgen ob Murau, September 2012

This document was written with KILE, is set in Palatino, compiled with pdfL<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X<sub>2</sub><sup>ε</sup> using BIBER.

## Danksagung

An erster Stelle möchte ich mich bei meinem Betreuer Dr.-Ing. Oliver Baur bedanken, dessen Tür stets für mich offen stand. Die zahlreichen Diskussionen machten es mir nicht allzu schwer wieder motiviert und mit neuen Ideen ans Werk zu gehen.

Weiter darf ich dem Institut für Weltraumforschung der Österreichischen Akademie der Wissenschaften meinen Dank aussprechen. Da mir das Softwaremodule *ARCSST* als Basis zur Implementierung einer neuen Software zur Verfügung gestellt wurde.

Nicht zuletzt möchte ich mich bei Univ.-Prof. Dr.-Ing. Torsten Mayer-Gürr bedanken, der mir mit wertvollen Anregungen und Hinweisen die Erstellung dieser Arbeit erleichterte.

Ein großer Dank gilt auch meinen Eltern, die mich geduldig und nicht nur in finanzieller Hinsicht immer unterstützt haben.

Deutsche Fassung:  
Beschluss der Curricula-Kommission für Bachelor-, Master- und Diplomstudien vom 10.11.2008  
Genehmigung des Senates am 1.12.2008

## EIDESSTÄTTLICHE ERKLÄRUNG

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommene Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Graz, am .....

.....  
(Unterschrift)

Englische Fassung:

## STATUTORY DECLARATION

I declare that I have authored this thesis independently, that I have not used other than the declared sources / resources, and that I have explicitly marked all material which has been quoted either literally or by content from the used sources.

.....  
date

.....  
(signature)

## Kurzfassung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Analyse des mit GPS bestimmten kinematischen Orbits des Satelliten GOCE, um das statische Gravitationsfeld der Erde zu bestimmen. Ausgehend von der Newton-Eulerschen Bewegungsgleichung wird die Position des Satelliten durch Lösung einer Anfangswertaufgabe mit numerischer Integration bestimmt, wobei kurze Bahnbögen für die Berechnung verwendet werden. Anschließend werden die berechneten Positionen als Taylorpunkt eines linearisierten Modells verwendet und aus den Residuen zu den kinematischen Positionen werden differentielle Verbesserungen des Gravitationsfeldes geschätzt. Die Linearisierung erfolgt mit den Variationsgleichungen.

Die im Rahmen dieser Arbeit implementierte Software **ANKOR** (**A**nalyse **k**inematischer **O**rbits) führt die Berechnung der Gravitationsfeldlösung in zwei Schritten durch. Der 1. Schritt stellt die numerische Integration des Orbits dar, wohingegen im 2. Schritt die Integration der Variationsgleichungen erfolgt, um die Zuschläge zu den näherungsweise bekannten Potentialkoeffizienten des Erdgravitationsfeldes bestmöglich zu schätzen.

Es werden zwei Ansätze für die Gravitationsfeldbestimmung verfolgt. Einerseits werden Bahnbögen der Länge 30 min verwendet, wobei die nicht deterministisch modellierbaren Störeinflüsse durch die Einführung konstanter empirischer Beschleunigungen absorbiert werden. Andererseits werden Bahnbögen der Länge 15 min verwendet. Da sich durch die kürzere Aufteilung der Bahnbögen die unmodellierten Signalanteile geringer auswirken kann auf die Einführung empirischer Beschleunigungen verzichtet werden.

Die Validierung mit einer externen Gravitationsfeldlösung zeigt, dass die berechneten Gravitationsfeldlösungen im lang- und mittelwelligen Bereich die Qualität erreichen, die aus der Analyse des kinematischen GOCE Orbits zu erwarten ist.

## Abstract

This thesis focuses on the analysis of the GPS-derived kinematic orbit of the satellite GOCE, in order to determine the static gravity field of the earth. The approach is based on the solution of Newton's equation of motion, formulated as an initial value problem, by numerical integration, considering short orbital arcs. The computed position of the satellite is used as approximate value in a linearised model to determine the differential improvements of the gravity field from the residuals to the kinematic position. The use of the variational equations provides the linearisation of the model.

Within the framework of this thesis, the software **ANKOR** (**A**nalysis of **k**inematic **O**rbits) is developed to determine the gravity field in two steps. The numerical integration of the orbit is computed in the first step and the second step proceeds the integration of the variational equations to estimate the differential improvements of the potential coefficients of gravity field.

As a consequence of investigations, two approaches for gravity field determination are pursued. On the one hand, 30 min orbital arcs are used, by introducing constant empirical accelerations to account for non-deterministic signals. On the other hand 15 min orbital arcs are considered, which leads to the mitigation of additional empirical parameters.

The validation with an external gravity field solution based on the acceleration approach shows that the computed solutions achieve the same quality in the long- and medium-wavelength spectrum.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Motivation . . . . .	1
1.2	Beobertungskonzept – Schwerefeldmissionen . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Synthese – Orbitintegration</b>	<b>5</b>
2.1	Physikalisches Modell . . . . .	7
2.2	Gravitationsfeld der Erde . . . . .	8
2.3	Referenzsysteme und System-Transformationen . . . . .	10
2.3.1	Transformation vom sphärischen lokalen Horizontsystem in das erdfeste kartesische Referenzsystem . . . . .	10
2.3.2	Transformation vom erdfesten Referenzsystem in das Inertialsystem . . . . .	12
2.3.3	Quaternionen – Hamilton Parametrisierung . . . . .	14
2.3.4	Transformation vom Bahnsystem in das Inertialsystem . . . . .	16
2.4	Drittkörperkräfte . . . . .	17
2.5	Gezeiten der festen Erde . . . . .	18
2.5.1	Permanentgezeiten . . . . .	21
2.6	Ozeangezeiten . . . . .	22
2.7	Polgezeiten . . . . .	23
2.8	Lösung der Anfangswertaufgabe . . . . .	24
2.8.1	Aufteilung in Bahnbögen . . . . .	25
2.9	Schätzen neuer Anfangswerte . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Analyse – Gravitationsfeldbestimmung</b>	<b>30</b>
3.1	Linearisierung mit den Variationsgleichungen . . . . .	32
3.2	Partielle Ableitungen der Kraftfunktion . . . . .	33
3.2.1	Ableitung der Kraftfunktion nach der Position – Gravitations-tensor . . . . .	34
3.2.2	Ableitung der Kraftfunktion nach den Potentialkoeffizienten . . . . .	36
3.3	Empirische Beschleunigungen . . . . .	37
3.4	Normalgleichungssystem . . . . .	38
3.4.1	Aufstellen des Normalgleichungssystems . . . . .	38
3.4.2	Elimination eines Teiles der Parameter . . . . .	40
3.4.3	Lösung des Normalgleichungssystems . . . . .	44

## Inhaltsverzeichnis

<b>4</b>	<b>Prozessierung der GOCE Realdaten</b>	<b>46</b>
4.1	Kinematische GOCE Orbits . . . . .	46
4.2	Vorverarbeitung der Daten . . . . .	47
4.2.1	Numerische Differentiation . . . . .	47
4.2.2	Detektion von groben Ausreißern . . . . .	49
4.3	Vergleich der Gravitationsfeldlösungen . . . . .	50
<b>5</b>	<b>Ergebnisse</b>	<b>52</b>
5.1	Einfluss der verwendeten Parameter . . . . .	52
5.1.1	Iterative Schätzung der Anfangswerte . . . . .	53
5.1.2	A priori Erdgravitationsfeldmodell . . . . .	55
5.1.3	Aliasing Effekte . . . . .	57
5.1.4	Problem der polaren Datenlücken . . . . .	59
5.1.5	Samplingrate . . . . .	60
5.1.6	Bahnbogenlänge . . . . .	61
5.1.7	empirische Beschleunigungen . . . . .	62
5.2	GOCE Gravitationsfeldlösungen . . . . .	64
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>67</b>
	<b>Literatur</b>	<b>71</b>



# 1 Einleitung

## 1.1 Motivation

Ein zentrales Aufgabengebiet der Geodäsie ist die Bestimmung des Schwerefeldes der Erde. Seit der Geburtsstunde der Satellitengeodäsie ist dies nicht nur mit Beobachtungen auf der Erdoberfläche möglich, sondern auch mit Beobachtungen im Außenraum. Diese satellitengestützten Beobachtungsverfahren ermöglichen es in kurzer Zeit eine Vielzahl an global homogen verteilten Informationen zu sammeln. Die genaue Kenntnis des Gravitationsfeldes ist für viele geowissenschaftliche Disziplinen, wie z. B. Geophysik, Geodäsie, Ozeanografie und Klimatologie, ein Gewinn. Im Folgenden werden einige Anwendungsgebiete beschrieben:

1. Das Schwerefeld der Erde spiegelt den integralen Effekt der Massenverteilung unseres Planeten wider, daher kann die genaue Kenntnis des Gravitationsfeldes einen Einblick in die dynamischen Prozesse im Erdinneren geben. Ein dynamischer Prozess ist u. a. die Mantelkonvektion, die die Bewegung der Lithosphärenplatten verursacht, an deren Grenzen vermehrt Erdbeben und Vulkanismus vorkommen. Weiter kann eine lokale Bestimmung des Gravitationsfeldes für die Prospektion in der Geologie genutzt werden.
2. Durch die zeitliche Veränderung des Gravitationsfeldes können Rückschlüsse auf Massenveränderungen gezogen werden. Dazu zählt der Anstieg des Meeresspiegels, das Abschmelzen von Eismassen, die Gezeiten oder die Variation der kontinentalen Wasserspeicher. Der zeitlich variable Teil des Gravitationsfeldes gibt auch Aufschluss über den Massentransport im System Erde, z. B. verursacht durch die postglaziale Hebung.
3. Um diese Variationen auf ein globales physikalisches Referenzsystem zu beziehen wird das Geoid verwendet. Das Geoid entspricht der Äquipotentialfläche der ruhenden Ozeane. Diese Referenzfläche ist Voraussetzung für ein global einheitliches Höhensystem, das auch bei ingenieurgeodätischen Anwendungen Verwendung findet.
4. Da das Geoid mit der Fläche des ruhenden mittleren Meeresspiegels zusammenfällt, ist es möglich, durch Messungen der Meerestopographie mittels Altimeter Satelliten, die Ozeanströmungen abzuleiten. Das dynamische System

## 1 Einleitung

der Meeresströmungen ist zu einem großen Teil für den globalen Wärme- und Energietransport verantwortlich und somit ein wichtiger Indikator für Klimaänderungen.

5. Die Satellitenbahn, vor allem von niedrig fliegenden Satelliten, wird insbesondere vom Schwerefeld der Erde beeinflusst. Die genaue Kenntnis des Gravitationsfeldes ermöglicht eine präzise Orbitbestimmung, z. B. für Altimeter Satelliten.

Das Aufgabengebiet der Bestimmung des Gravitationsfeldes der Erde ist somit in einen interdisziplinären Prozess eingebunden, um das dynamische System Erde besser zu verstehen. Für weitere Informationen siehe Ilk u. a. [15].

### 1.2 Beobachtungskonzept – Schwerefeldmissionen

Um den Genauigkeitsanforderungen der in Kapitel 1.1 beschriebenen Anwendungsgebiete Rechnung zu tragen, wurden die drei Satellitenmissionen CHAMP (Challenging Minisatellite Payload), GRACE (Gravity Recovery and Climate Experiment) und GOCE (Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer) speziell für die Bestimmung des Erdgravitationsfeldes initiiert.

Die Konfiguration der Satellitenmission CHAMP ist Satellite-to-Satellite Tracking im high-low Modus (SST-hl). Der Orbit des Satelliten wird mit GPS (Global Positioning System) bestimmt, wobei die nicht-gravitativen Kräfte mit einem Akzelerometer im Massenzentrum gemessen werden. Die Satellitenmission CHAMP wurde im September 2010 beendet, das Beobachtungskonzept jedoch wird auch bei den anderen Missionen und vermutlich ebenso bei zukünftigen Missionen verwendet. Mit der Konfiguration SST-hl wird der lang- und mittelwellige Anteil des Gravitationsfeldes bis etwa zum Grad 70 einer Kugelfunktionsreihenentwicklung bestimmt.

GRACE besteht aus zwei in einem Abstand von ca. 220 km aufeinanderfolgenden Satelliten, somit steht neben SST-hl auch Satellite-to-Satellite Tracking im low-low Modus (SST-ll) zur Verfügung. Bei dem Konzept SST-ll wird die Distanz bzw. die Distanzänderung zwischen den beiden Satelliten erfasst. Dies ermöglicht auch die Anteile des Gravitationsfeldes bis zum Grad 180 zu erfassen. Diese Satellitenmission wurde vorrangig entwickelt um die zeitliche Veränderung des Schwerefeldes zu erfassen.

Das Messprinzip der Satellitenmission GOCE ist Satellite Gravity Gradiometry (SGG). Dabei messen 6 Akzelerometer, die auf 3 orthogonalen Achsen angeordnet sind, Beschleunigungsdifferenzen, die mit den zweiten Ableitungen des Gravitationspotentials in Verbindung gebracht werden. Durch dieses Konzept und die niedrige

## 1 Einleitung

Flughöhe von ca. 260 km kann das statische Gravitationsfeld der Erde bis zum Grad 250 aufgelöst werden. Bedingt durch die niedrige Flughöhe entstehen große nicht-gravitative Kräfte (Luftwiderstand, Strahlungsdruck der Sonne, Erdalbedo), die kontinuierlich kompensiert werden. Die langwelligen Komponenten des Gravitationsfeldes werden mit SST-hl bestimmt.

Der limitierende Faktor der Schwerefeldmissionen ist die Flughöhe, die wie ein Tiefpassfilter wirkt. Um dieser Abschwächung der höheren Frequenzen entgegenzuwirken, werden Ableitungen des Gravitationspotentials "gemessen". Durch die unterschiedlichen Konzepte ergeben sich unterschiedliche Beobachtungstypen. Mit dem Konzept SST-hl werden erste Ableitungen "beobachtet", SST-ll entspricht den Differenzen der ersten Ableitung und mit SGG werden praktisch zweite Ableitungen erfasst. In dieser Arbeit werden Daten der Satellitenmission GOCE mit dem Konzept des SST-hl analysiert.

Da SGG im niedrigen Frequenzbereich nicht sensitiv ist, werden diese Gravitationsfeldanteile mit SST-hl bestimmt. Die Lösung des Erdschwerefeldes ergibt sich dann durch die Kombination der Gradiometrie (SGG) und der Analyse der Bahnstörungen (SST-hl) auf Normalgleichungsebene, vgl. Pail u. a. [24]. Auch bei GRACE stabilisiert die Analyse der Bahnstörungen die Lösung, siehe Mayer-Gürr [20]. Der kinematische Orbit entspricht der epochenweise, rein geometrisch bestimmten Position des Satelliten. Um das Gravitationsfeld aus einem kinematischen Orbit eines Satelliten zu bestimmen, wurden einige Methoden entwickelt, wobei drei dieser Ansätze im Folgenden angeführt werden:

1. Der Beschleunigungsansatz verwendet als Beobachtungsgleichung den Gradienten des Gravitationspotentials,  $\nabla V$ , aus der direkt die Koeffizienten der Kugelfunktionsreihe des Gravitationspotentials  $V$  geschätzt werden. Die benötigte Beschleunigung des Satelliten wird mit Methoden der numerischen Differentiation aus den kinematischen Positionen bestimmt. Für mehr Informationen siehe Baur u. a. [5].
2. Einen weiteren Ansatz stellt das Energieintegral dar, vgl. Badura u. a. [3]. Dabei findet das Prinzip der Energieerhaltung Anwendung. Bei diesem Ansatz wird die Geschwindigkeit des Satelliten benötigt, die ebenfalls aus den kinematischen Positionen mit numerischer Differentiation ermittelt wird.
3. Diese Arbeit beschäftigt sich damit, unmittelbar die Positionen des Satelliten zu verwenden, um die Koeffizienten der Kugelfunktionsreihe des Gravitationspotentials zu bestimmen. Dazu wird in einem ersten Schritt numerisch ein Orbit integriert, der in einem zweiten Schritt mit den gemessenen kinematischen Positionen verglichen wird, um Zuschläge zu den a priori Koeffizienten

## 1 Einleitung

zu schätzen. Die Linearisierung erfolgt mit den Variationsgleichungen. Vergleichbare Ansätze sind der celestial mechanics approach, siehe Beutler u. a. [6] und die Integralgleichungsmethode in Mayer-Gürr [20].

## 2 Synthese – Orbitintegration

Um mit einem Satelliten als Testmasse das statische Gravitationsfeld der Erde zu bestimmen, werden berechnete Beobachtungen mit den gemessenen kinematischen Positionen verglichen und aus den Residuen werden Zuschläge zu den Näherungswerten geschätzt. Die Analyse der Bahnstörungen wird in dieser Arbeit in zwei Schritte aufgeteilt. Dieses Kapitel umfasst den ersten Schritt, der als Synthese bezeichnet wird, da aus dem näherungsweise bekannten Gravitationsfeld die Positionen berechnet werden.

Es handelt sich um eine Anfangswertaufgabe. Dazu wird das physikalische Modell der Satellitenbewegung vorgestellt und auf die Lösung dieser Anfangswertaufgabe eingegangen. Die Bewegungsgleichung ist von den Kräften, die auf den Satelliten wirken abhängig. Die Modellierung der Kräfte mit dem größten Einfluss auf den Satelliten GOCE wird in diesem Kapitel beschrieben. Dazu zählt das Gravitationsfeld der Erde, welches die dominierende Kraftkomponente darstellt und im zweiten Schritt, der Analyse, bestimmt wird. Weiter sind jedoch die direkten und indirekten Störbeschleunigungen anderer Planeten, besonders von Sonne und Mond zu berücksichtigen. Auf eine Modellierung der nicht-gravitativen Kräfte wurde verzichtet, da diese im Falle von GOCE bereits im Orbit größtenteils kompensiert werden. Die Modellierung der wirkenden Kräfte erfolgt nicht nur im Inertialsystem, daher werden in diesem Kapitel die verwendeten System-Transformationen beschrieben. Anschließend wird gezeigt, dass mit Hilfe der Variationsgleichungen die Initialwerte der State-Vektoren bestmöglich an die gemessenen kinematischen Positionen angepasst werden können. Die Abbildung 2.1 zeigt den Arbeitsablauf der Synthese bzw. der Orbitintegration, wobei auf die einzelnen Teile im Laufe dieses Abschnitts näher eingegangen wird.

## 2 Synthese – Orbitintegration

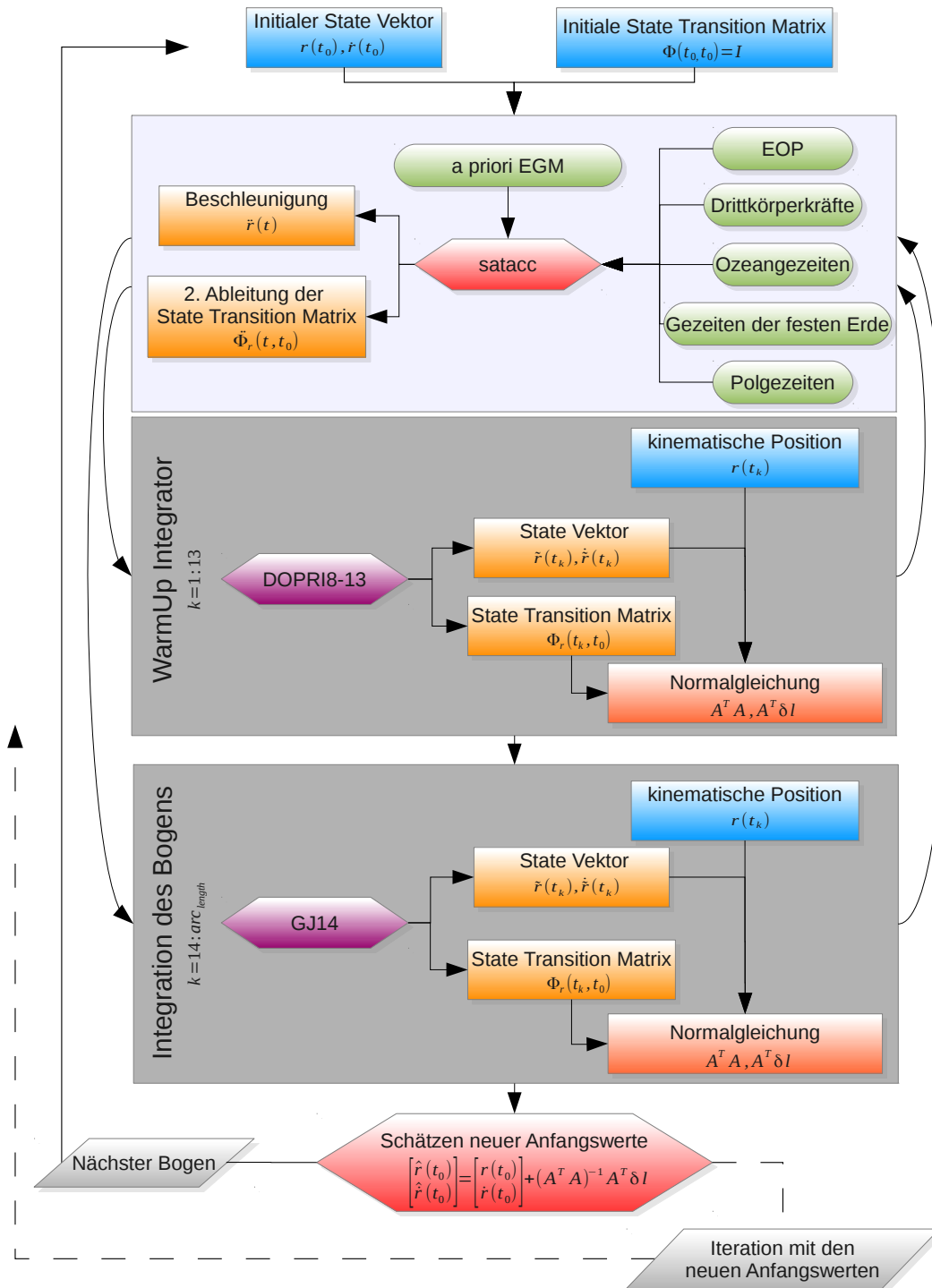


Abbildung 2.1: Arbeitsablauf der Synthese – Orbitintegration

## 2.1 Physikalisches Modell

Das zweite Newtonsche Axiom besagt, dass in einem Inertialsystem die Änderung einer Bewegung durch eine Kraft  $\mathbf{F}$  verursacht wird

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}, \quad (2.1)$$

wobei der Impuls des Teilchen  $\mathbf{p}$  definiert ist durch

$$\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}. \quad (2.2)$$

Setzt man (2.2) in (2.1) ein und bildet die Ableitung des Impulses nach der Zeit, ergibt sich

$$m\ddot{\mathbf{r}} + \dot{m}\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}. \quad (2.3)$$

Da die Massenänderung in (2.3) zwar bei einem Satelliten vorhanden sein kann, jedoch sehr klein ist, wird im Allgemeinen  $\dot{m} = 0$  gesetzt. Dadurch ergibt sich die Newton-Eulersche Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}. \quad (2.4)$$

Es wird die spezifische Kraftfunktion  $\mathbf{a}$  eingeführt, die sich auf die Einheitsmasse bezieht  $\mathbf{a} = \frac{1}{m}\mathbf{F}$ . Nun ergibt sich die kompakte Form

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} = \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{a}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}), \quad (2.5)$$

mit der die Bewegung eines Satelliten beschrieben werden kann. Die Beschreibung erfolgt im Inertialsystem, da in einem bewegten bzw. in einem rotierenden System im Allgemeinen noch die Beschleunigung des Bezugssystems und die Zentrifugalkraft berücksichtigt werden muss. Es können noch zusätzliche Scheinkräfte auftreten. Wenn das Bezugssystem nicht konstant rotiert, muss die Eulerkraft berücksichtigt werden, treten Geschwindigkeiten im bewegten System auf, so ist die Corioliskraft zu berücksichtigen

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{1}{m}\mathbf{F} - \ddot{\mathbf{R}} - \underbrace{\mathbf{d} \times (\mathbf{d} \times \mathbf{r})}_{\text{Zentrifugalbeschl.}} - \underbrace{\dot{\mathbf{d}} \times \mathbf{r}}_{\text{Eulerbeschl.}} - \underbrace{2\dot{\mathbf{d}} \times \dot{\mathbf{r}}}_{\text{Coriolisbeschl.}}, \quad (2.6)$$

mit dem Drehvektor  $\mathbf{d}$  und der Beschleunigung des Bezugssystems  $\ddot{\mathbf{R}}$ .

Wie bereits erwähnt, ist das Gravitationsfeld der Erde die dominierende Kraftkomponente, die Gravitationsfeldstärke wird durch den Gradienten des Gravitationspotentials,  $\nabla V$ , dargestellt und mit  $\mathbf{g}$  bezeichnet. Das Gravitationspotential  $V$  wird mit

## 2 Synthese – Orbitintegration

einer Kugelfunktionsreihe beschrieben, siehe Abschnitt 2.2. Es wirken jedoch noch Gravitationskräfte von anderen Planeten auf den Satelliten, vor allem von Sonne und Mond. Diese Kräfte beeinflussen einerseits den Satelliten direkt und andererseits beeinflussen sie die Gravitationswirkung auf die Erde. Es resultiert eine Massenverlagerung der festen Erde sowie der Ozeane, die einen indirekten Effekt (Gezeiteneffekt) auf die Satellitenbahn ausüben. Weitere Störbeschleunigungen ergeben sich durch nicht-gravitative Kräfte, wie Luftwiderstand, Strahlungsdruck der Sonne und Erdalbedo. Die genannten Kräfte stellen den größten Einfluss auf die Bewegung eines Satelliten dar. Die Bewegungsgleichung eines Satelliten kann somit durch

$$\ddot{\mathbf{r}}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{a} = \mathbf{g} + \mathbf{a}_d + \mathbf{a}_s + \mathbf{a}_o + \mathbf{a}_p + \mathbf{a}_n \quad (2.7)$$

geschrieben werden.

Die Berechnung der Drittkörpereffekte  $\mathbf{a}_d$  ist in Abschnitt 2.4 beschrieben. Der Einfluss der Gezeiten der festen Erde  $\mathbf{a}_s$  sowie der Ozeangezeiten  $\mathbf{a}_o$  und der Polgezeiten  $\mathbf{a}_p$  wird mit dem Gradienten des entsprechenden Gezeitenpotentials modelliert. Die Modellierung erfolgt mit Variation der Potentialkoeffizienten, siehe Abschnitte 2.5 bis 2.7. Die Berechnung erfolgt in der Subroutine `satacc`, vgl. Abbildung 2.1. Auf die nicht-gravitativen Kräfte  $\mathbf{a}_n$  wird in dieser Arbeit nicht näher eingegangen.

## 2.2 Gravitationsfeld der Erde

Der größte Einfluss auf die Bewegung eines Satelliten wird durch das Gravitationsfeld der Erde verursacht. Es handelt sich um ein konservatives Kraftfeld, somit ist die Arbeit, die aufgebracht werden muss, um von einem Punkt  $P$  zu einem Punkt  $Q$  zu gelangen vom Weg unabhängig. Das Gravitationspotential  $V$  ist ein Skalarfeld, durch Gradientenbildung entsteht das Vektorfeld  $\mathbf{g} = \nabla V$ . Dieses Vektorfeld ist im Außenraum quellenfrei  $\langle \nabla, \nabla V \rangle = \Delta V = 0$ , daher kann das Gravitationspotential in eine Reihe von Kugelfunktionen entwickelt werden, siehe Heiskanen und Moritz [14]:

$$V(r, \varphi, \lambda) = \frac{GM}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n P_{nm}(\sin \varphi) (C_{nm} \cos(m\lambda) + S_{nm} \sin(m\lambda)) \quad (2.8)$$

Die Parametrisierung von  $V$  erfolgt mit den sphärischen Koordinaten  $r, \varphi, \lambda$  im erdfesten Referenzsystem. Dadurch ergibt sich durch Gradientenbildung ein sphärisches lokales Horizontsystem, der Ursprung liegt im Beobachtungspunkt und die Basisvektoren formen ein Rechtssystem. Die Basisfunktionen der Kugelfunktionsreihe sind die Kugelflächenfunktionen  $P_{nm}(\sin \varphi) \cos(m\lambda)$  und  $P_{nm}(\sin \varphi) \sin(m\lambda)$  mit den *vollständig normierten* zugeordneten Legendrefunktionen erster Art  $P_{nm}(\sin \varphi)$ .



## 2 Synthese – Orbitintegration

Die Koeffizienten der Kugelfunktionsreihenentwicklung werden mit  $C_{nm}$  und  $S_{nm}$  bezeichnet und einem Erdgravitationsfeldmodell entnommen. Diese Potentialkoeffizienten entsprechen den gesuchten Größen der Analyse von Bahnstörungen. Für  $R$  wird der mittlere Äquatordradius verwendet und die geozentrische Konstante  $GM$  ist die Gravitationskonstante  $G$  multipliziert mit der Erdmasse  $M$ . Der Zentralterm ( $n = 0$ ) der Reihenentwicklung ist  $\frac{GM}{r}$  und beschreibt das Gravitationspotential einer homogenen Kugel.

Der Gradientenoperator  $\nabla$ , ausgedrückt in sphärischen Koordinaten, lautet

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \mathbf{e}_\lambda. \quad (2.9)$$

Der Operator angewendet auf (2.8) führt auf

$$\mathbf{g}(r, \varphi, \lambda) = \nabla V(r, \varphi, \lambda) = \left( \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \mathbf{e}_\lambda \right) V(r, \varphi, \lambda), \quad (2.10)$$

mit den partiellen Ableitungen nach den sphärischen Koordinaten

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = \frac{GM}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} \sum_{m=0}^n P'_{nm}(\sin \varphi) (C_{nm} \cos(m\lambda) + S_{nm} \sin(m\lambda)), \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} = \frac{GM}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} \sum_{m=0}^n P_{nm}(\sin \varphi) (-C_{nm} \sin(m\lambda) + S_{nm} \cos(m\lambda)) m, \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{GM}{R} \sum_{n=0}^{\infty} -(n+1) \frac{1}{r} \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} \sum_{m=0}^n P_{nm}(\sin \varphi) (C_{nm} \cos(m\lambda) + S_{nm} \sin(m\lambda)), \quad (2.13)$$

wobei die Ableitung der zugeordneten Legendrefunktionen  $\frac{\partial}{\partial \varphi} P_{nm}(\sin \varphi)$  mit  $P'_{nm}(\sin \varphi)$  bezeichnet wird. Die Anwendung des Gradientenoperators (2.9) ergibt somit, vgl. Schäfer [28]

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(r, \varphi, \lambda) = \frac{GM}{R^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{R}{r} \right)^{n+2} \sum_{m=0}^n -(n+1) P_{nm}(\sin \varphi) (C_{nm} \cos(m\lambda) + S_{nm} \sin(m\lambda)) \mathbf{e}_r + \\ P'_{nm}(\sin \varphi) (C_{nm} \cos(m\lambda) + S_{nm} \sin(m\lambda)) \mathbf{e}_\varphi + \\ \frac{1}{\cos \varphi} P_{nm}(\sin \varphi) m (-C_{nm} \sin(m\lambda) + S_{nm} \cos(m\lambda)) \mathbf{e}_\lambda. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Die Berechnung von  $\mathbf{g}(r, \varphi, \lambda)$  wird mit den Satellitenpositionen im erdfesten Referenzsystem parametrisiert in sphärischen Koordinaten durchgeführt. Durch die

Parametrisierung liegt die Beschleunigung in einem sphärischen lokalen Horizontsystem vor,  $\mathbf{g}_{lf}(r, \varphi, \lambda)$ . Wie in Abschnitt 2.1 erwähnt, ist die Formulierung der Bewegungsgleichung eines Satelliten im Inertialsystem einfacher. Aus diesem Grund ist  $\mathbf{g}_{lf}(r, \varphi, \lambda)$  vom sphärischen lokalen Horizontsystem in das erdfeste kartesische Referenzsystem  $\mathbf{g}_{ef}(x, y, z)$  (Abschnitt 2.3.1) und anschließend in das Inertialsystem  $\mathbf{g}_{if}(X, Y, Z)$  (Abschnitt 2.3.2) zu transformieren. Das folgende Kapitel 2.3 beschreibt sämtliche benötigte Transformationen sowie die in (2.15) und (2.16) verwendeten Rotationsmatrizen.

$$\mathbf{g}_{ef}(x, y, z) = \mathbf{U}_{lf2ef} \mathbf{g}_{lf}(r, \varphi, \lambda) \quad (2.15)$$

$$\mathbf{g}_{if}(X, Y, Z) = \mathbf{U}_{ef2if} \mathbf{g}_{ef}(x, y, z) \quad (2.16)$$

## 2.3 Referenzsysteme und System-Transformationen

Die Beschleunigung eines Satelliten aufgrund des Erdgravitationsfeldes in (2.14) bezieht sich auf das sphärische lokale Horizontsystem. Die Bewegungsgleichung eines Satelliten lässt sich jedoch im Inertialsystem einfacher darstellen, vgl. Abschnitt 2.1. Daher sind Transformationen zwischen den verwendeten Referenzsystemen notwendig, die in diesem Abschnitt näher beschrieben werden.

### 2.3.1 Transformation vom sphärischen lokalen Horizontsystem in das erdfeste kartesische Referenzsystem

Die sphärischen Koordinaten berechnen sich aus den erdfesten kartesischen Koordinaten mit

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \varphi = \arctan \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \lambda = \arctan \frac{y}{x}. \quad (2.17)$$

Der Vektor  $\mathbf{x}$  im erdfesten kartesischen Koordinatensystem lässt sich durch

$$\mathbf{x} = r \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \lambda \\ \cos \varphi \sin \lambda \\ \sin \varphi \end{pmatrix} = r \cos \varphi \cos \lambda \mathbf{e}_x + r \cos \varphi \sin \lambda \mathbf{e}_y + r \sin \varphi \mathbf{e}_z \quad (2.18)$$

in Kugelkoordinaten darstellen.

## 2 Synthese – Orbitintegration

Es handelt sich um ein topozentrisches System, der Ursprung liegt im Beobachtungspunkt. Die Basisvektoren  $\mathbf{e}_\varphi$ ,  $\mathbf{e}_\lambda$  und  $\mathbf{e}_r$  werden aus den normierten Tangentenvektoren an die Koordinatenlinien  $r = \text{const}$ ,  $\varphi = \text{const}$  und  $\lambda = \text{const}$  gebildet:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} &= r \begin{pmatrix} -\sin \varphi \cos \lambda \\ -\sin \varphi \sin \lambda \\ \cos \varphi \end{pmatrix}; & \mathbf{e}_\varphi &= \frac{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} \right\|} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \cos \lambda \\ -\sin \varphi \sin \lambda \\ \cos \varphi \end{pmatrix}, \\ \left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} \right\| &= r, \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda} &= r \begin{pmatrix} -\cos \varphi \sin \lambda \\ \cos \varphi \cos \lambda \\ 0 \end{pmatrix}; & \mathbf{e}_\lambda &= \frac{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda} \right\|} = \begin{pmatrix} -\sin \lambda \\ \cos \lambda \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda} \right\| &= r \cos \varphi, \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r} &= \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \lambda \\ \cos \varphi \sin \lambda \\ \sin \varphi \end{pmatrix}; & \mathbf{e}_r &= \frac{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r} \right\|} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \lambda \\ \cos \varphi \sin \lambda \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \\ \left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r} \right\| &= 1. \end{aligned} \quad (2.21)$$

In Matrixschreibweise ergibt sich dann aus den Gleichungen (2.19), (2.20) und (2.21)

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \cos \lambda & -\sin \lambda & \cos \varphi \cos \lambda \\ -\sin \varphi \sin \lambda & \cos \lambda & \cos \varphi \sin \lambda \\ \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_\varphi \\ \mathbf{e}_\lambda \\ \mathbf{e}_r \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

Somit ergibt sich die Rotationsmatrix mit der die Transformation vom sphärischen lokalen Horizontsystem in das erdfeste kartesische Referenzsystem berechnet wird zu

$$\mathbf{U}_{\text{lf2ef}} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \cos \lambda & -\sin \lambda & \cos \varphi \cos \lambda \\ -\sin \varphi \sin \lambda & \cos \lambda & \cos \varphi \sin \lambda \\ \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

Bei den verwendeten Referenzsystemen handelt es sich um Orthonormalsysteme, daher gilt für alle Rotationsmatrizen

$$\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^T \quad \mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{U} \mathbf{U}^T = \mathbf{I}, \quad \|\det \mathbf{U}\| = 1. \quad (2.24)$$

Ist  $\det \mathbf{U} = -1$ , handelt es sich um eine Dreh-Spiegelungsmatrix, vgl. (2.23). Die inverse Transformation, vom erdfesten kartesischen Referenzsystem in das sphärische lokale Horizontsystem, berechnet sich mit

$$\mathbf{U}_{\text{ef2lf}} = \mathbf{U}_{\text{lf2ef}}^T = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \cos \lambda & -\sin \varphi \sin \lambda & \cos \varphi \\ -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ \cos \varphi \cos \lambda & \cos \varphi \sin \lambda & \sin \varphi \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

Verwendet man die Rotationsmatrix aus (2.23) in Gleichung (2.15) erhält man die Beschleunigung des Satelliten aufgrund des Erdgravitationsfeldes im erdfesten Referenzsystem, vgl. Petrovskaya und Vershkov [27].

### 2.3.2 Transformation vom erdfesten Referenzsystem in das Inertialsystem

Das erdfeste kartesische Referenzsystem *International Terrestrial Reference System* (ITRS) rotiert mit der Erde mit, wobei der Ursprung im Geozentrum der Erde liegt, Ozeane und Atmosphäre sind inkludiert. Die Realisierung des ITRS ist der Referenzrahmen *International Terrestrial Reference Frame* (ITRF).

Das Inertialsystem *Geocentric Celestial Reference System* (GCRS) ist eigentlich ein quasi-Inertialsystem, da es raumfest ist, aber mit der Erde mitbeschleunigt wird. Der Referenzrahmen *International Celestial Reference Frame* (ICRF) realisiert das GCRS.

Die Transformation vom ITRF ins ICRF wird wie in den *GOCE Standards* [12] beschrieben gemäß den *IERS Conventions 2003* (McCarthy und Petit [22]) durchgeführt. Es werden zwei Ansätze von McCarthy und Petit [22] für die Transformation angeführt, der Äquinoxien basierte Ansatz und der *Celestial Intermediate Origin* (CIO) basierte Ansatz. In dieser Arbeit wurde der CIO basierte Ansatz verwendet. Es wurden die Fortran Subroutinen des *IERS Conventions Center*<sup>1</sup> verwendet. Einige dieser bereitgestellten Subroutinen verwenden Teile der *Standards of Fundamental Astronomy* (SOFA) Software Kollektion<sup>2</sup>.

Die Koordinatentransformation vom ITRF in den ICRF erfolgt mit der Rotationsmatrix  $\mathbf{U}_{\text{ef2if}}$  durch

$$\mathbf{r}_{\text{if}} = \mathbf{U}_{\text{ef2if}} \mathbf{r}_{\text{ef}}, \quad \mathbf{U}_{\text{ef2if}} = \mathbf{Q}(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{W}(t). \quad (2.26)$$

Die Matrix  $\mathbf{W}(t)$  berücksichtigt die Polbewegung und beschreibt die Bewegung des *Celestial Intermediate Pole* (CIP) im erdfesten System. Die Drehung um den CIP wird mit dem Erdrotationswinkel bzw. der Matrix  $\mathbf{R}(t)$  angebracht. Der CIP bewegt sich aufgrund von Präzession und Nutation im raumfesten System, diese Bewegung wird mit der Matrix  $\mathbf{Q}(t)$  berücksichtigt. Die inverse Transformation ist mit der Drehmatrix  $\mathbf{U}_{\text{ef2if}}^T$  gegeben. In den folgenden Abschnitten wird die Berechnung der einzelnen Matrizen näher beschrieben.

<sup>1</sup>[http://tai.bipm.org/iers/conv2003/conv2003\\_c5.html](http://tai.bipm.org/iers/conv2003/conv2003_c5.html)

<sup>2</sup>[http://www.iausofa.org/2012\\_0301.F/CompleteList.html](http://www.iausofa.org/2012_0301.F/CompleteList.html)

### Polbewegung

Die Rotationsmatrix  $\mathbf{W}(t)$  berücksichtigt die Polbewegung und wird mit

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_3(-s')\mathbf{R}_2(x_p)\mathbf{R}_1(y_p) \quad (2.27)$$

berechnet. Da die Polbewegung nicht ausreichend mit mathematischen Modellen beschrieben werden kann, werden die Polkoordinaten des CIP im ITRF vom IERS (International Earth Rotation and Reference Systems Service) bereitgestellt. In dieser Arbeit werden die Polkoordinaten  $x_p$  und  $y_p$  in Bogensekunden aus dem Datenfile EOP05Co4<sup>3</sup> entnommen. Die Werte sind tageweise angegeben und werden linear interpoliert. Die Matrizen  $\mathbf{R}_1$ ,  $\mathbf{R}_2$  und  $\mathbf{R}_3$  entsprechen den elementaren Drehmatrizen um die  $x$ -,  $y$ - und  $z$ - Achse.

Für  $s'$  wird die Approximation

$$s' = -47 \text{ arcsec} \cdot T \quad (2.28)$$

verwendet, wobei  $T$  die Zeit in Julianischen Jahrhunderten seit 1. Jänner 2000 12:00 (J2000) darstellt:

$$T = \frac{t_{\text{TT}} - 2451545}{36525}. \quad (2.29)$$

Die Zeit  $t_{\text{TT}}$  bezieht sich auf die *Terrestrial Time* TT und wird mit dem Julianischen Datum in (2.29) eingeführt. In dieser Arbeit beziehen sich sämtliche Zeiten auf TT.

### Erdrotation

Die Erdrotation wird durch die Drehung um den Erdrotationswinkel  $\Theta$  in der Form

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_3(-\Theta) \quad (2.30)$$

angebracht, wobei  $\Theta$  berechnet wird aus

$$\begin{aligned} \Theta(T_u) &= 2\pi(0.7790572732640 + 1.00273781191135448T_u), \\ T_u &= t_{\text{UT1}} - 2451545. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Es fließt die Zeit seit J2000 in UT1 ein, der Zeitunterschied ( $\text{UT1} - \text{UTC}$ ) wird ebenfalls vom IERS im Datenfile EOP05Co4 zur Verfügung gestellt. Da sämtliche Zeiten in TT verwendet werden ist noch der Unterschied zwischen TT und UTC anzubringen, wobei  $n$  die Anzahl der eingeführten Schaltsekunden bezeichnet:

$$\begin{aligned} \text{TAI} &= \text{TT} - 32.184 \text{ sec} \\ \text{UTC} &= \text{TAI} - n. \end{aligned} \quad (2.32)$$

---

<sup>3</sup>[http://data.iers.org/products/177/11221/orig/eopco4-05\\_IAU2000.62now](http://data.iers.org/products/177/11221/orig/eopco4-05_IAU2000.62now)

### Präzession und Nutation

Aufgrund von Präzession und Nutation bewegt sich der CIP im raumfesten System. Durch das Modell IAU2000 wird diese Bewegung beschrieben. Die Matrix  $\mathbf{Q}(t)$  setzt sich aus den Koordinaten  $X$  und  $Y$  des CIP im ICRF zusammen

$$\mathbf{Q}(t) = \begin{pmatrix} 1 - aX^2 & -aXY & X \\ -aXY & 1 - aY^2 & Y \\ -X & -Y & 1 - a(X^2 + Y^2) \end{pmatrix} \mathbf{R}_3(s). \quad (2.33)$$

Die Größen  $Z$  und  $a$  ergeben sich nach Capitaine u. a. [8] mit

$$Z = \sqrt{1 - (X^2 + Y^2)}, \quad a = 1/(1 + Z). \quad (2.34)$$

Der Ausdruck  $s$  (CIO-Locator) stellt die Position des *Celestial Intermediate Origin* (CIO) im ICRF dar

$$s(t) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \frac{X\dot{Y} - Y\dot{X}}{1 + Z} dt + s_0. \quad (2.35)$$

### 2.3.3 Quaternionen – Hamilton Parametrisierung

Die Transformation vom erdfesten Referenzsystem in das Inertialsystem wird für den kinematischen *Precise Science Orbit* (PSO) von GOCE in Form von Quaternionen mitgeliefert, siehe *GOCE Level2 Product Data Handbook* [13]. Der beobachtete kinematische Orbit wird in dieser Arbeit als Referenzorbit bezeichnet. Die Berechnung der Rotationsmatrix  $\mathbf{U}_{\text{ef2if}}$ , wie in Abschnitt 2.3.2 beschrieben, erfolgt nur zu Simulationszwecken, indem der Referenzorbit mit numerischer Integration aus einem einzigen initialen State-Vektor  $[\mathbf{r}(t_0), \dot{\mathbf{r}}(t_0)]$  generiert wird. Andernfalls wird die Rotation mit dem Referenzorbit in Form von Quaternionen bereitgestellt.

Die Quaternionen stellen eine Erweiterung der komplexen Zahlen dar. Es handelt sich um ein vierdimensionales Zahlensystem mit eindimensionalem Realteil. Somit lässt sich ein Quaternion  $q$  mit den reellen Zahlen  $q_0, q_1, q_2$  und  $q_3$  eindeutig beschreiben:

$$q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3 \quad \text{mit} \quad i^2 = j^2 = k^2 = -1. \quad (2.36)$$

Der Imaginärteil verhält sich also analog zu den komplexen Zahlen. Die Verwendung von Quaternionen wird auch als Hamilton Parametrisierung bezeichnet. Eine

## 2 Synthese – Orbitintegration

Rotationsmatrix lässt sich mit den normierten Parametern eines Quaternions mit

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_0^2 & 2(q_1q_2 + q_3q_0) & 2(q_1q_3 - q_2q_0) \\ 2(q_1q_2 - q_3q_0) & -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_0^2 & 2(q_2q_3 + q_1q_0) \\ 2(q_1q_3 + q_2q_0) & 2(q_2q_3 - q_1q_0) & -q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_0^2 \end{pmatrix}$$

mit

$$\sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} = 1 \quad (2.37)$$

berechnen. Die Reorthogonalisierung einer Rotationsmatrix kann mit dieser Parametrisierung vermieden werden, da die Anfälligkeit gegenüber Rundungsfehlern gering ist. Weiter werden nur vier Parameter benötigt um die Rotationsmatrix aufzustellen. Da die Quaternionen zum Zeitpunkt der kinematischen Position des Referenzorbits gegeben sind, kann es notwendig sein die Quaternionen zu interpolieren. Diese Notwendigkeit ergibt sich bei der numerischen Integration mit Einschrittverfahren, vgl. Abschnitt 2.8. Nachstehend wird die Interpolation von Quaternionen beschrieben.

### Interpolation von Quaternionen

Es seien zwei Quaternionen  $q_a$  und  $q_b$ , in der Form (2.36), zu den Zeitpunkten  $t_a$  und  $t_b$  gegeben. Gesucht ist das Quaternion  $q_t$  zu einem beliebigen Zeitpunkt  $t$ . In einem ersten Schritt ist zu überprüfen, ob das Skalarprodukt der Parameter negativ ist, siehe Gruber u. a. [13]

$$q_b = -q_b \quad \text{wenn} \quad q_{a1}q_{b1} + q_{a2}q_{b2} + q_{a3}q_{b3} < 0 \quad (2.38)$$

Die differentielle Rotation zwischen  $q_a$  und  $q_b$  berechnet sich mit

$$\begin{aligned} q_{ab0} &= q_{a0}q_{b0} + q_{a1}q_{b1} + q_{a2}q_{b2} + q_{a3}q_{b3} \\ q_{ab1} &= q_{a0}q_{b1} - q_{a1}q_{b0} + q_{a3}q_{b2} - q_{a2}q_{b3} \\ q_{ab2} &= q_{a0}q_{b2} - q_{a2}q_{b0} + q_{a1}q_{b3} - q_{a3}q_{b1} \\ q_{ab3} &= q_{a0}q_{b3} - q_{a3}q_{b0} + q_{a2}q_{b1} - q_{a1}q_{b2}, \end{aligned} \quad (2.39)$$

wobei sich der Rotationswinkel durch

$$\Phi_{ab} = 2 \arccos(q_{ab0}) \quad (2.40)$$

ergibt. Die lineare Interpolation dieses Rotationswinkels genügt den Genauigkeitsanforderungen:

$$\Phi_{at} = \Phi_{ab} \frac{t - t_a}{t_b - t_a}. \quad (2.41)$$

## 2 Synthese – Orbitintegration

Das Quaternion, das dem interpolierten Rotationswinkel entspricht, kann mit

$$q_{at0} = \cos \frac{\Phi_{at}}{2}, \quad q_{at1} = q_{ab1} \frac{\sin \frac{\Phi_{at}}{2}}{\sin \frac{\Phi_{ab}}{2}}, \quad q_{at2} = q_{ab2} \frac{\sin \frac{\Phi_{at}}{2}}{\sin \frac{\Phi_{ab}}{2}}, \quad q_{at3} = q_{ab3} \frac{\sin \frac{\Phi_{at}}{2}}{\sin \frac{\Phi_{ab}}{2}} \quad (2.42)$$

ermittelt werden. Die Komponenten des gesuchten Quaternions  $q_t$  berechnen sich dann aus

$$\begin{aligned} q_{t0} &= q_{a0}q_{at0} + q_{a1}q_{at1} + q_{a2}q_{at2} + q_{a3}q_{at3}, \\ q_{t1} &= q_{a0}q_{at1} - q_{a1}q_{at0} + q_{a3}q_{at2} - q_{a2}q_{at3}, \\ q_{t2} &= q_{a0}q_{at2} - q_{a2}q_{at0} + q_{a1}q_{at3} - q_{a3}q_{at1}, \\ q_{t3} &= q_{a0}q_{at3} - q_{a3}q_{at0} + q_{a2}q_{at1} - q_{a1}q_{at2}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

### 2.3.4 Transformation vom Bahnsystem in das Inertialsystem

Im zweiten Schritt, der Analyse der Bahnstörungen, können empirische Beschleunigungen mitgeschätzt werden, siehe Abschnitt 3.3. Diese Beschleunigungen werden im Bahnsystem des Satelliten, also in radial, cross-track und along track Richtung angesetzt, siehe Montenbruck und Gill [23]. Da die Normalgleichung im Inertialsystem berechnet wird, muss die Transformationsmatrix zwischen dem Bahnsystem und dem Inertialsystem  $\mathbf{U}_{\text{of2if}}$  bekannt sein.

Der Ursprung des Referenzsystems ist das Massenzentrum des Satelliten, die x-Achse (along track) zeigt in Richtung des Geschwindigkeitsvektors  $\dot{\mathbf{r}}$ , die y-Achse (cross track) ist parallel zum Drehimpulsvektor und die z-Achse (quasi-radial) komplettiert das Orthonormalsystem, vgl. Gruber u. a. [13]. Damit kann die Rotationsmatrix  $\mathbf{U}_{\text{of2if}}$  mit

$$\mathbf{U}_{\text{of2if}} = \begin{pmatrix} \frac{\dot{\mathbf{r}}}{\|\dot{\mathbf{r}}\|} & \frac{\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}}{\|\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}\|} & \frac{\dot{\mathbf{r}} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})}{\|\dot{\mathbf{r}} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})\|} \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

angeschrieben werden.



## 2.4 Drittkörperkräfte

Abgesehen vom Gravitationsfeld der Erde wirken auch Gravitationskräfte anderer Himmelskörper auf den Satelliten. Insbesondere der Mond  $\mathfrak{D}$  wegen seiner Nähe zur Erde und die Sonne  $\mathfrak{S}$  wegen ihrer großen Masse bewirken eine Beschleunigung des Satelliten. Aufgrund der großen Entfernung von Mond und Sonne reicht die Approximation mit einer Punktmasse aus, um die Beschleunigung auf den Satelliten zu bestimmen:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \nabla \left( \frac{GM}{r} \right) = -\frac{GM}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|} = -GM \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3}. \quad (2.45)$$

Die Masse des Mondes  $M_{\mathfrak{D}}$  bewirkt also die Beschleunigung des Satelliten mit

$$\ddot{\mathbf{r}} = -GM_{\mathfrak{D}} \left( \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\mathfrak{D}}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\mathfrak{D}}\|^3} \right) = GM_{\mathfrak{D}} \left( \frac{\mathbf{r}_{\mathfrak{D}} - \mathbf{r}}{\|\mathbf{r}_{\mathfrak{D}} - \mathbf{r}\|^3} \right), \quad (2.46)$$

wobei  $\mathbf{r}_{\mathfrak{D}}$  die Position des Mondes und  $\mathbf{r}$  die Satellitenposition im ICRF bezeichnet. Die Positionen der Himmelskörper werden mit den Ephemeriden JPL-DE405<sup>4</sup> ermittelt. Die Beschleunigung  $\ddot{\mathbf{r}}$  bezieht sich auf das quasi-Inertialsystem mit dem Ursprung im Geozentrum der Erde. Die Erde wird jedoch selbst von der Masse des Mondes beschleunigt mit

$$\ddot{\mathbf{r}} = GM_{\mathfrak{D}} \frac{\mathbf{r}_{\mathfrak{D}}}{\|\mathbf{r}_{\mathfrak{D}}\|^3}. \quad (2.47)$$

Damit ergibt sich nach Gleichung (2.6) die Beschleunigung des Satelliten verursacht durch die Drittkörper Mond  $\mathfrak{D}$  und Sonne  $\mathfrak{S}$  mit

$$\ddot{\mathbf{r}}_{\mathfrak{D}} = GM_{\mathfrak{D}} \left( \frac{\mathbf{r}_{\mathfrak{D}} - \mathbf{r}}{\|\mathbf{r}_{\mathfrak{D}} - \mathbf{r}\|^3} - \frac{\mathbf{r}_{\mathfrak{D}}}{\|\mathbf{r}_{\mathfrak{D}}\|^3} \right), \quad (2.48)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_{\mathfrak{S}} = GM_{\mathfrak{S}} \left( \frac{\mathbf{r}_{\mathfrak{S}} - \mathbf{r}}{\|\mathbf{r}_{\mathfrak{S}} - \mathbf{r}\|^3} - \frac{\mathbf{r}_{\mathfrak{S}}}{\|\mathbf{r}_{\mathfrak{S}}\|^3} \right). \quad (2.49)$$

eine schematische Visualisierung ist mit Abbildung 2.2 gegeben.

<sup>4</sup><http://ssd.jpl.nasa.gov/?ephemerides>

## 2 Synthese – Orbitintegration

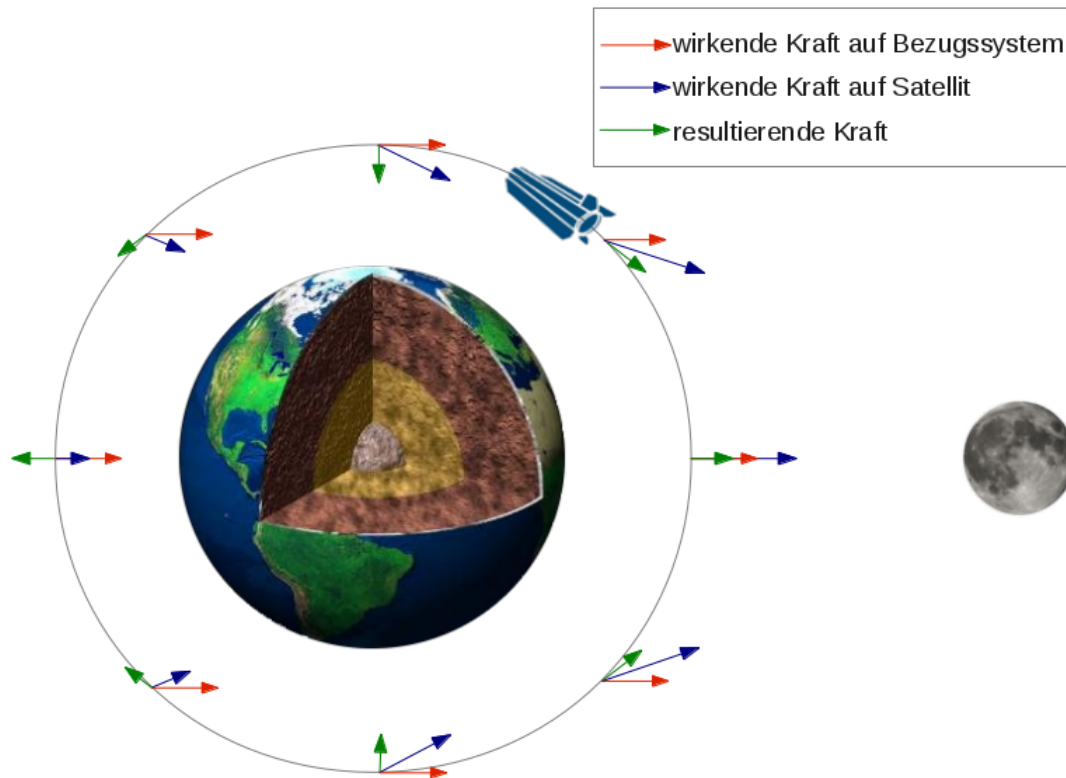


Abbildung 2.2: Wirkung der Drittkörperkräfte auf den Satelliten

Die Gesamtbeschleunigung des Satelliten verursacht durch die Drittkörperkräfte, vgl. (2.7), wird damit

$$\mathbf{a}_d = \ddot{\mathbf{r}}_{\text{D}} + \ddot{\mathbf{r}}_{\text{O}}. \quad (2.50)$$

### 2.5 Gezeiten der festen Erde

Die Drittkörperkräfte beeinflussen nicht nur den Satelliten direkt, sondern auch die Massenpartikel der Erde, ähnlich Abbildung 2.2. Aufgrund der Gravitationskraft von Mond und Sonne resultieren Deformationen und Massenverlagerungen der festen Erde, die wiederum einen indirekten Effekt auf die Satellitenbahn niedrig fliegender Satelliten ausüben. Diese zeitabhängige Variation des Gravitationspotentials wird mit Korrekturen der Potentialkoeffizienten  $C_{nm}$  und  $S_{nm}$  modelliert. Die Korrekturen  $\Delta C_{nm}$  und  $\Delta S_{nm}$  werden mit Hilfe der Love Zahlen ausgedrückt. Die Erde wird als anelastisch angenommen, somit reagiert sie mit einer Phasenverzögerung auf die Gezeitenkräfte. Die Modellierung der Gezeiten der festen Erde erfolgt nach

## 2 Synthese – Orbitintegration

den *IERS Conventions 2010* (Petit und Luzum [25]) in drei Schritten. Zuerst wird der frequenzunabhängige Anteil berechnet, der dann um einen frequenzabhängigen Anteil korrigiert wird. Der dritte Schritt behandelt die Permanentzeiten, siehe 2.5.1, wobei in der Berechnung der ersten beiden Schritte der zeitunabhängige Beitrag der permanenten Gezeiten bereits inkludiert ist.

Im ersten Schritt werden die Korrekturen  $\Delta C_{nm}$  und  $\Delta S_{nm}$  mit den frequenzunabhängigen Anteilen der Love Zahlen  $k_{nm}$  berechnet. Die folgende Darstellung resultiert aus der Reihenentwicklung des gezeitenerzeugenden Potentials in Kugelfunktionen:

$$[\Delta C_{nm} - i\Delta S_{nm}](t) = \frac{k_{nm}}{2n+1} \sum_{j=\mathfrak{D},\mathfrak{O}} \frac{GM_j}{GM} \left(\frac{R}{r_j}\right)^{n+1} P_{nm}(\sin \varphi_j) e^{-im\lambda_j}. \quad (2.51)$$

Da die Erde als anelastisch angenommen wird, haben die Love Zahlen reelle und imaginäre Anteile. Damit ergeben sich die Komponenten zu

$$\begin{aligned} \Delta C_{nm}(t) &= \sum_{j=\mathfrak{D},\mathfrak{O}} \frac{GM_j}{GM} \sum_{n=2}^3 \frac{1}{2n+1} \left(\frac{R}{r_j}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n P_{nm}(\sin \varphi_j) \left( k_{nm}^{\Re} \cos(m\lambda_j) + k_{nm}^{\Im} \sin(m\lambda_j) \right), \\ \Delta S_{nm}(t) &= \sum_{j=\mathfrak{D},\mathfrak{O}} \frac{GM_j}{GM} \sum_{n=2}^3 \frac{1}{2n+1} \left(\frac{R}{r_j}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n P_{nm}(\sin \varphi_j) \left( k_{nm}^{\Re} \sin(m\lambda_j) - k_{nm}^{\Im} \cos(m\lambda_j) \right). \end{aligned} \quad (2.52)$$

Die zeitabhängigen sphärischen Koordinaten von Mond  $\mathfrak{D}$  und Sonne  $\mathfrak{O}$  im erdfesten Referenzsystem werden mit  $r_j$ ,  $\varphi_j$  und  $\lambda_j$  bezeichnet. Weiter wird der Einfluss der Tiden vom Grad zwei auf die Potentialkoeffizienten vom Grad vier angebracht:

$$[\Delta C_{4m} - i\Delta S_{4m}](t) = \frac{k_{2m}^{(+)}}{5} \sum_{j=\mathfrak{D},\mathfrak{O}} \frac{GM_j}{GM} \left(\frac{R}{r_j}\right)^3 P_{2m}(\sin \varphi_j) e^{-im\lambda_j} \quad (m = 0, 1, 2). \quad (2.53)$$

Die Komponenten dieser ellipsoidischen Korrektur berechnen sich mit den Love Zahlen  $k_{2m}^{(+)}$  über

$$\begin{aligned} \Delta C_{4m}(t) &= \sum_{j=\mathfrak{D},\mathfrak{O}} \frac{1}{5} \frac{GM_j}{GM} \left(\frac{R}{r_j}\right)^3 \sum_{m=0}^2 P_{2m}(\sin \varphi_j) k_{2m}^{(+)} \cos(m\lambda_j) \\ \Delta S_{4m}(t) &= \sum_{j=\mathfrak{D},\mathfrak{O}} \frac{1}{5} \frac{GM_j}{GM} \left(\frac{R}{r_j}\right)^3 \sum_{m=0}^n P_{2m}(\sin \varphi_j) k_{2m}^{(+)} \sin(m\lambda_j). \end{aligned} \quad (2.54)$$

## 2 Synthese – Orbitintegration

Der 2. Schritt berücksichtigt die frequenzabhängigen Anteile, die aufgrund von Resonanzeffekten entstehen. Die Korrekturen der  $\Delta C_{nm}$  und  $\Delta S_{nm}$  aus Schritt 1 lassen sich als Summe der Beiträge der jeweiligen diskreten Frequenzen  $f$  in den drei Frequenzbändern der Konstituenten darstellen:

$$\Delta C_{20}(t) = \sum_{f(2,0)} (A_0 \delta k_f H_f) e^{i\Theta_f}, \quad (2.55)$$

$$[\Delta C_{2m} - i\Delta S_{2m}](t) = \eta_m \sum_{f(2,m)} (A_m \delta k_f H_f) e^{i\Theta_f}, \quad (m = 1, 2). \quad (2.56)$$

Das astronomische Argument  $\Theta_f$  beschreibt dabei die diskreten Frequenzen als Linearkombination der Bewegung von Mond und Sonne gemäß

$$\Theta_f = \sum_{i=1}^6 n_i \beta_i, \quad (2.57)$$

wobei  $\beta_i$  die *Doodson Elemente* bezeichnen und  $n_i$  ganzzahlige Multiplikatoren darstellen. In dieser Arbeit wurde  $\beta_i$  mit einer Linearkombination aus den Fundamentalargumenten berechnet. Die Amplituden  $(A_m \delta k_f H_f)$  für die frequenzabhängige Korrektur werden zu *in-phase* Amplituden  $Amp_f^{(ip)}$  und zu *out-of-phase* Amplituden  $Amp_f^{(op)}$  zusammengefasst und können für die zugehörigen Frequenzen aus Petit und Luzum [25] entnommen werden. Damit ergibt sich aus Gleichung (2.55) für das langperiodische Frequenzband ( $m = 0$ ) die Korrektur

$$\Delta C_{20}(t) = \sum_{f(2,0)} Amp_f^{(ip)} \cos \Theta_f - Amp_f^{(op)} \sin \Theta_f. \quad (2.58)$$

Für das tägliche Frequenzband ( $m = 1$ ) können die Korrekturen gemäß Gleichung (2.56) mit  $\eta_1 = -i$  ermittelt werden. Es ergibt sich für die Korrekturen

$$\begin{aligned} \Delta C_{21}(t) &= \sum_{f(2,1)} Amp_f^{(ip)} \sin \Theta_f + Amp_f^{(op)} \cos \Theta_f, \\ \Delta S_{21}(t) &= \sum_{f(2,1)} Amp_f^{(ip)} \cos \Theta_f - Amp_f^{(op)} \sin \Theta_f. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Die Komponenten des halbtäglichen Frequenzbandes ( $m = 2$ ) ergeben sich unter Berücksichtigung, dass  $\eta_2 = 1$  ist, mit

$$\begin{aligned} \Delta C_{22}(t) &= \sum_{f(2,2)} Amp_f^{(ip)} \cos \Theta_f, \\ \Delta S_{22}(t) &= \sum_{f(2,2)} Amp_f^{(ip)} - \sin \Theta_f. \end{aligned} \quad (2.60)$$

### 2.5.1 Permanentgezeiten

Der zeitliche Mittelwert des gezeitenerzeugenden Potentials ist von Null verschieden. Daher entsteht eine permanente Deformation durch die Gezeiten der festen Erde. Dieser zeitunabhängige Beitrag der Permanentgezeiten beeinflusst die geraden zonalen Koeffizienten, wobei der größte Einfluss mit dem Koeffizient  $C_{20}$  verknüpft ist.

Im 3. Schritt der Modellierung der Gezeiten der festen Erde wird dieser permanente Einfluss berücksichtigt. Die Berechnung der ersten beiden Schritte inkludiert bereits den zeitunabhängigen Beitrag. Somit sind die Permanentgezeiten nicht enthalten und es ergibt sich ein sogenanntes *tide free* Gravitationsfeldmodell.

Wenn der zeitunabhängige Beitrag enthalten ist spricht man vom *zero tide* Gravitationsfeldmodell und der Einfluss der Permanentgezeiten muss an die Korrekturen aus Schritt 1 und Schritt 2 wieder angebracht werden:

$$\begin{aligned} \Delta C_{20}^{\text{perm}} &= 4.4228 \cdot 10^{-8} \cdot (-0.31460) \cdot k_{20} \\ \Delta C_{20}^{\text{zt}} &= \Delta C_{20} - \Delta C_{20}^{\text{perm}}. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Es wird in dieser Arbeit das *tide free* System gewählt. Der Einfluss der Gezeiten der festen Erde wird in Form von Geoidhöhen in Abbildung 2.3 dargestellt.

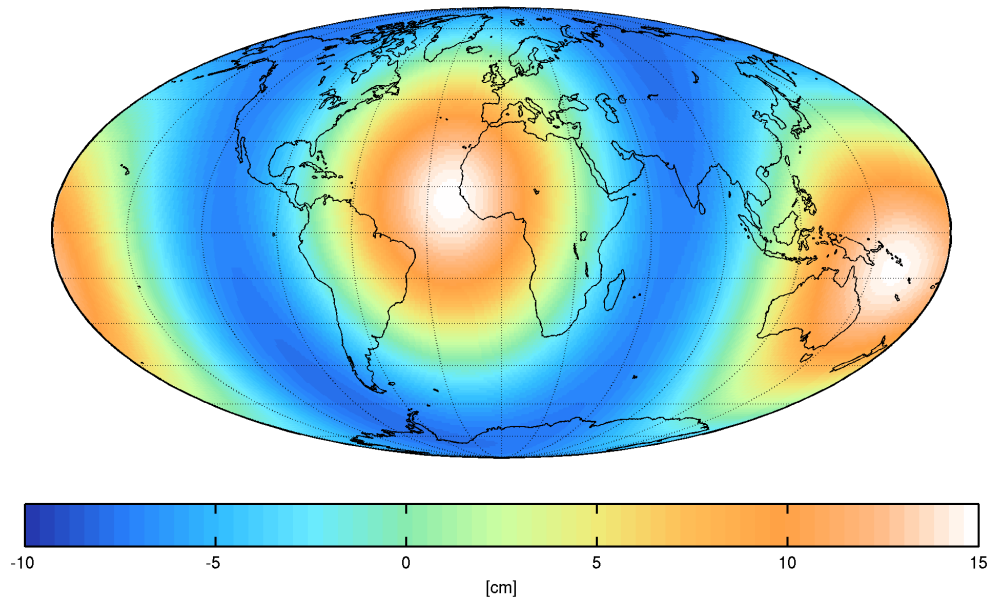


Abbildung 2.3: Einfluss der Gezeiten der festen Erde dargestellt in Geoidhöhen am 01.11.2009 0:00 UTC

## 2.6 Ozeangezeiten

Der Einfluss der Gravitationskraft von Mond und Sonne wirkt auch auf die Wassermassen der Ozeane, die indirekt auf den Orbit eines niedrig fliegenden Satelliten wirken. Es wird ein Ozeangezeitenmodell verwendet. Die Modellierung ist komplex, da z. B. die Küstenlinien das freie Strömen der Wassermassen beeinflussen. In dieser Arbeit wurde das Modell FES2004<sup>5</sup> mit dem Konstituent S1<sup>6</sup> verwendet. Die Phase der langperiodischen Konstituenten  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  wurde nach Petit und Luzum [26] auf  $\frac{\pi}{2}$  korrigiert. Die Modellierung der Ozeangezeiten erfolgt wie bei den Gezeiten der festen Erde durch Variation der Potentialkoeffizienten  $\Delta C_{nm}$  und  $\Delta S_{nm}$ . Nach den *IERS Conventions 2010* (Petit und Luzum [25]) berechnet sich die Korrektur der Potentialkoeffizienten mit

$$[\Delta C_{nm} - i\Delta S_{nm}](t) = \sum_f \sum_{\pm} \left( C_{f,nm}^{\pm} \mp iS_{f,nm}^{\pm} \right) e^{\pm i\Theta_f}, \quad (2.62)$$

wobei  $\Theta_f$  dem astronomischen Argument entspricht, vgl. Gleichung (2.57). Die Koeffizienten der zugehörigen Frequenz  $(C_{f,nm}^{\pm}, S_{f,nm}^{\pm})$  ergeben sich durch

$$\begin{aligned} C_{f,nm}^{\pm} &= \frac{4\pi G\rho_w}{g_e} \left( \frac{1+k'_n}{2n+1} \right) \hat{C}_{f,nm}^{\pm} \sin(\varepsilon_{f,nm}^{\pm} + \chi_f) \\ S_{f,nm}^{\pm} &= \frac{4\pi G\rho_w}{g_e} \left( \frac{1+k'_n}{2n+1} \right) \hat{C}_{f,nm}^{\pm} \cos(\varepsilon_{f,nm}^{\pm} + \chi_f). \end{aligned} \quad (2.63)$$

Die verwendeten Konstanten  $\rho_w = 1025 \text{ kg m}^{-3}$  und  $g_e = 9.7803278 \text{ m s}^{-2}$  entsprechen der Dichte des Meerwassers bzw. der mittleren Schwere am Äquator. Die Auflastkoeffizienten  $k'_n$  berücksichtigen die Deformation des Ozeanbodens aufgrund der Massenverlagerungen. Aus dem Modell FES2004 werden die Tidenhöhenkoeffizienten in Form von Amplituden  $\hat{C}_{f,nm}^{\pm}$  und Phasen  $\varepsilon_{f,nm}^{\pm}$  entnommen. Der Phasenbias  $\chi_f$  wird über die Vorzeichen der Cartwright-Tayler Amplitude  $H_f$  bestimmt, siehe Cartwright und Tayler [9]. Zusammengefasst können die Komponenten der Korrektur der Potentialkoeffizienten  $\Delta C_{nm}(t)$  und  $\Delta S_{nm}(t)$  wie folgt angeschrieben werden.

$$\begin{aligned} \Delta C_{nm}(t) &= \sum_f (A_{oc} \cos \Theta_f + B_{oc} \sin \Theta_f) \\ \Delta S_{nm}(t) &= \sum_f (C_{oc} \sin \Theta_f + D_{oc} \cos \Theta_f) \\ A_{oc} &= C_{f,nm}^+ + C_{f,nm}^- & B_{oc} &= S_{f,nm}^+ + S_{f,nm}^- \\ C_{oc} &= -C_{f,nm}^+ + C_{f,nm}^- & D_{oc} &= S_{f,nm}^+ - S_{f,nm}^- \end{aligned} \quad (2.64)$$

<sup>5</sup><ftp://tai.bipm.org/iers/conv2010/chapter6/tidemodels/fes2004.dat>

<sup>6</sup><ftp://tai.bipm.org/iers/conv2010/chapter6/tidemodels/S1.dat>

## 2 Synthese – Orbitintegration

Die Abbildung 2.4 zeigt den Einfluss der mit dem Modell FES2004 berechneten Ozeangezeiten in Form von Geoidhöhen.

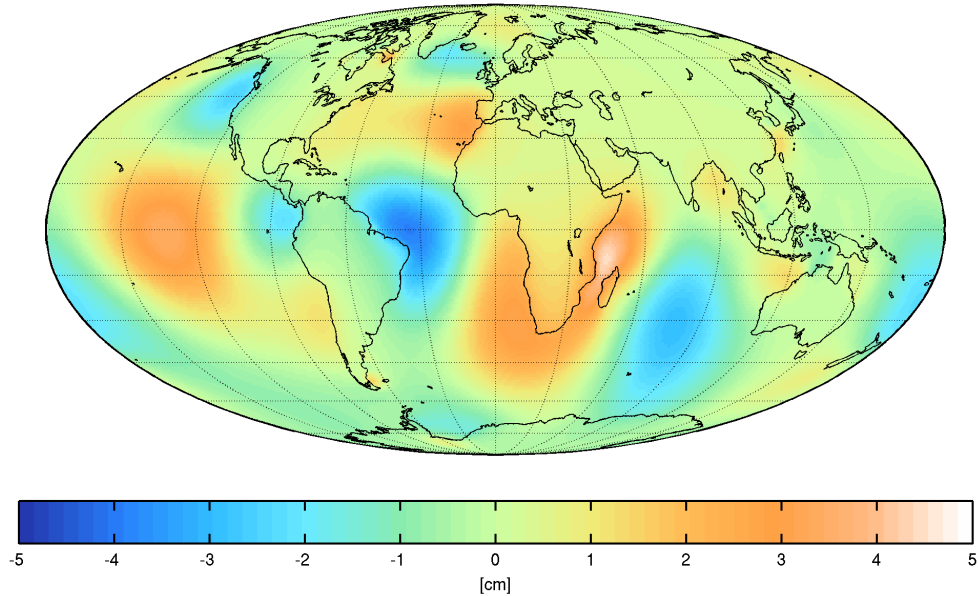


Abbildung 2.4: Einfluss der Ozeangezeiten (FES2004 mit  $S_1$ ) dargestellt in Geoidhöhen am 01.11.2009 0:00 UTC

## 2.7 Polgezeiten

Die Polgezeiten werden durch die Zentrifugalkraft der Polbewegung erzeugt. Die Berechnung erfolgt nach den *IERS Conventions 2010* (Petit und Luzum [25]).

Die durch die Polbewegung hervorgerufene Deformation der festen Erde wirkt sich auf die Potentialkoeffizienten  $C_{21}$  und  $S_{21}$  mit

$$\begin{aligned}\Delta C_{21}(t) &= -1.333 \cdot 10^{-9} (m_1 + 0.0115 m_2), \\ \Delta S_{21}(t) &= -1.333 \cdot 10^{-9} (m_2 - 0.0115 m_1),\end{aligned}\tag{2.65}$$

aus, wobei  $m_1$  und  $m_2$  die Position des mittleren Rotationspols im erdfesten Referenzsystem darstellt und in Bogensekunden eingeführt wird. Die Berechnung von  $m_1$  und  $m_2$  erfolgt durch

$$\begin{aligned}m_1 &= x_p(t) - \bar{x}_p(t) \\ m_2 &= -(y_p(t) - \bar{y}_p(t)).\end{aligned}\tag{2.66}$$

## 2 Synthese – Orbitintegration

Dabei sind  $x_p(t)$  und  $y_p(t)$  die Polkoordinaten im erdfesten Referenzsystem, vgl. Abschnitt 2.3.2. Die Mittelwerte  $\bar{x}_p(t)$  und  $\bar{y}_p(t)$  werden mit dem *IERS(2010) mean pole model* bestimmt, siehe Petit und Luzum [25].

Es werden auch die Ozeane von den Polgezeiten beeinflusst. Die Polbewegung unterliegt der Chandler Periode ( $\sim 430$  Tage) und jährlichen Variationen. Die Modellierung der Ozeanpolgezeiten wird mit dem *self-consistent equilibrium model* von Desai<sup>7</sup> berechnet. Die Berechnung erfolgt mit der Änderung der Potentialkoeffizienten:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Delta C_{nm} \\ \Delta S_{nm} \end{pmatrix} (t) &= R_n \left\{ \begin{pmatrix} A_{nm}^{\Re} \\ B_{nm}^{\Re} \end{pmatrix} (m_1 \gamma_2^{\Re} + m_2 \gamma_2^{\Im}) + \begin{pmatrix} A_{nm}^{\Im} \\ B_{nm}^{\Im} \end{pmatrix} (m_2 \gamma_2^{\Re} - m_1 \gamma_2^{\Im}) \right\}, \\ R_n &= \frac{\Omega^2 R^4}{GM} \frac{4\pi G \rho_w}{g_e} \left( \frac{1 + k'_n}{2n + 1} \right). \end{aligned} \quad (2.67)$$

Die Koeffizienten  $A_{nm} = A_{nm}^{\Re} + iA_{nm}^{\Im}$  und  $B_{nm} = B_{nm}^{\Re} + iB_{nm}^{\Im}$  werden dem Modell von Desai entnommen, wobei die Modellierung als Funktion von  $m_1$  und  $m_2$  (2.66) in Radiant erfolgt. Die verwendeten Konstanten sind die Winkelgeschwindigkeit der Erde  $\Omega = 7.292115 \cdot 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$ , die Dichte des Meerwassers  $\rho_w = 1025 \text{ kg m}^{-3}$  und die mittlere Schwere am Äquator  $g_e = 9.7803278 \text{ m s}^{-2}$ . Die Auflastkoeffizienten  $k'_n$  und die Werte für  $\gamma = \gamma_2^{\Re} + i\gamma_2^{\Im}$  sind nach Petit und Luzum [25] implementiert. Der größte Beitrag der Ozeanpolgezeiten stammt von den  $(n, m) = (2, 1)$  Koeffizienten. In dieser Arbeit wird die Modellierung bis zum Grad 10 berechnet, damit können 99% des Potentials der Ozeanpolgezeiten aufgelöst werden.

## 2.8 Lösung der Anfangswertaufgabe

Die Bewegungsgleichung (2.5) stellt ein System von drei Differentialgleichungen 2. Ordnung dar. Inklusive der zuvor beschriebenen Störeinflüsse ergibt sich somit die Beschleunigung eines Satelliten mit (2.7). Die Lösung der Bewegungsgleichung entspricht dem State-Vektor  $\mathbf{y}$  mit der Position  $\mathbf{r}(t)$  und der Geschwindigkeit  $\dot{\mathbf{r}}(t)$  des Satelliten

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{r}(t) \\ \dot{\mathbf{r}}(t) \end{pmatrix}. \quad (2.68)$$

Da die Störkräfte zu berücksichtigen sind, ist keine analytische Lösung möglich, daher erfolgt die Lösung der Bewegungsgleichung mit numerischer Integration. Dazu wird das System von 3 Differentialgleichungen 2. Ordnung in ein System von 6 Differentialgleichungen 1. Ordnung übergeführt

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{r}}(t) \\ \mathbf{a}(t, \mathbf{r}) \end{pmatrix}. \quad (2.69)$$

<sup>7</sup><ftp://tai.bipm.org/iers/conv2010/chapter6/desaiiscopolecoef.txt.gz>



## 2 Synthese – Orbitintegration

Die Kraftfunktion  $\mathbf{a}(t, \mathbf{r})$  ist selbst von der gesuchten Position  $\mathbf{r}(t)$  des Satelliten abhängig. Die Kraftfunktion ist nicht von der Geschwindigkeit des Satelliten abhängig, da nicht-gravitative Kräfte keine Berücksichtigung finden. Ausgehend von den sechs Anfangswerten  $[\mathbf{r}(t_0), \dot{\mathbf{r}}(t_0)]$  werden dann Position und Geschwindigkeit mit konstantem Sampling durch numerische Integration bestimmt:

$$\mathbf{r}(t_{i+1}) = \mathbf{r}(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{\mathbf{r}}(t) dt, \quad (2.70)$$

$$\dot{\mathbf{r}}(t_{i+1}) = \dot{\mathbf{r}}(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{a}(t, \mathbf{r}) dt. \quad (2.71)$$

Es werden die numerischen Integratoren Gauss-Jackson 14 und DOPRI8-13 verwendet. Die Implementierung wurde von der Software *ARCSST* von Arsov und Pail [1] übernommen. Das Mehrschrittverfahren Gauss-Jackson 14 für Differentialgleichungen 2. Ordnung ist der Klasse der Prädiktor-Korrektor Verfahren zuzuordnen und benötigt 13 Startwerte. Das Einzelschrittverfahren DOPRI8-13 liefert die benötigten Startwerte, vgl. Abbildung 2.1. Es sei für nähere Details der numerischen Integrationsverfahren auf z. B. Montenbruck und Gill [23] verwiesen.

### 2.8.1 Aufteilung in Bahnbögen

Typischerweise wird für niedrig fliegende Satelliten die numerische Bahnintegration mit kurzen Bahnbögen durchgeführt, vgl. z. B. Mayer-Gürr [20] oder Beutler u. a. [6]. Es gibt daher für jeden Bahnbogen  $i$  einen initialen State-Vektor  $[\mathbf{r}(t_0^i), \dot{\mathbf{r}}(t_0^i)]$ . In der 1. Iteration entsprechen die initialen State-Vektoren den mit GPS bestimmten kinematischen Positionen bzw. den Geschwindigkeiten, wobei die Geschwindigkeiten aus den kinematischen Positionen mit numerischer Differentiation abgeleitet werden, siehe Abschnitt 4.2. Um das statische Gravitationsfeld der Erde zu bestimmen, werden die Residuen des gemessenen kinematischen Orbits (Referenzorbit) zu dem numerisch integrierten Orbit betrachtet. Werden die Intervalle der einzelnen Bahnbögen kurz gehalten, wirkt sich das nur näherungsweise bekannte a priori Gravitationsfeld der Erde nicht so stark auf die Residuen aus. Darüber hinaus wird durch die Aufteilung in kurze Bahnbögen die Auswirkung der nicht modellierbaren Bahnstörungen geringer. Weiter vereinfacht die Aufteilung in Bahnbögen den Umgang mit Datenlücken. Da nach einer Datenlücke ein neuer Bahnbogen beginnt, ist sichergestellt, dass innerhalb eines Bogens die kinematischen Positionen mit konstantem Sampling vorliegen. Die Verwendung von sehr kurzen Bahnbögen wirkt sich jedoch nachteilig auf die Schätzung der Koeffizienten niedrigen Grades aus, da diese eine langperiodische Veränderung der Satellitenbahn verursachen, siehe Löcher [18].

## 2.9 Schätzen neuer Anfangswerte

Der initiale State-Vektor des  $i$ -ten Bahn Bogens besteht in der 1. Iteration aus der beobachteten kinematischen Position und aus der mit den kinematischen Positionen numerisch differenzierten Geschwindigkeit des Satelliten (Abschnitt 4.2)

$$\mathbf{y}(t_0^i) = \begin{pmatrix} \mathbf{r}(t_0^i) \\ \dot{\mathbf{r}}(t_0^i) \end{pmatrix}. \quad (2.72)$$

Es handelt sich dabei bereits um eine sehr gute Näherung des initialen State-Vektors, wobei die Berechnung des integrierten Orbits auch von den a priori Näherungswerten der Potentialkoeffizienten abhängt. Die berechneten Positionen dienen dann in der Analyse bzw. der Gravitationsfeldbestimmung als Taylorpunkt eines linearisierten Modells, vgl. Kapitel 3. Da die Beobachtungsgleichungen nicht linear sind, wird die Lösung von einem Linearisierungsfehler verzerrt, der von der Qualität des Taylorpunktes abhängig ist. Weicht somit der berechnete Orbit zu stark vom beobachteten Orbit ab, muss ein Iterationsverfahren erfolgen, indem iterativ mit den verbesserten Näherungswerten ein Orbit integriert wird aus dem wieder Verbesserungen der Potentialkoeffizienten geschätzt werden. Da dies rechentechnisch sehr aufwändig und zeitintensiv ist, werden nur die initialen State-Vektoren iterativ an den beobachteten Referenzorbit angepasst, um dann mit diesen Residuen in einem Schritt die Potentialkoeffizienten zu schätzen.

Im Allgemeinen erfolgt bei nicht-linearen Beobachtungsgleichungen die Linearisierung mit einer Taylorreihenentwicklung und dem Abbruch nach dem linearen Term. Die linearisierte Beobachtungsgleichung eines Bahn Bogens mit konstanten Potentialkoeffizienten lautet

$$\mathbf{r}(t) = \tilde{\mathbf{r}}(t) + \left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{y}(t_0)} \right|_{\tilde{\mathbf{r}}} \delta \mathbf{y}(t_0). \quad (2.73)$$

Die beobachtete kinematische Position im Inertialsystem ist  $\mathbf{r}(t)$  und  $\tilde{\mathbf{r}}(t)$  bezeichnet die aus den Näherungswerten berechnete Position im Inertialsystem. Die Zuschläge  $\delta \mathbf{y}(t_0)$  werden pro Bahnbogen geschätzt, daher werden die initialen State-Vektoren auch als lokale Parameter bezeichnet. Die Schätzung erfolgt mit der Methode der kleinsten Quadrate. Die partielle Ableitung der berechneten Position nach dem initialen State-Vektor wird als State-Transition-Matrix  $\Phi_r(t, t_0)$  bezeichnet, wobei die numerische Bahnintegration sehr sensitiv auf geringe Änderungen des initialen State-Vektors reagiert, vgl. Arsov und Pail [1].

Die State-Transition-Matrix stellt den ersten Teil der Variationsgleichungen dar, ihre Berechnung wird im Folgenden vorgestellt, siehe Montenbruck und Gill [23]. Ausgehend von der Bewegungsgleichung als System von Differentialgleichungen 1. Ord-

## 2 Synthese – Orbitintegration

nung

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{r}}(t) \\ \mathbf{a}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \end{pmatrix}, \quad (2.74)$$

mit dem State-Vektor

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{r}(t) \\ \dot{\mathbf{r}}(t) \end{pmatrix}, \quad (2.75)$$

wird die partielle Ableitung nach dem initialen State-Vektor  $\mathbf{y}(t_0)$  gebildet

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}(t_0)} \frac{d}{dt} \mathbf{y}(t) = \frac{\partial \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))}{\partial \mathbf{y}(t_0)} = \frac{\partial \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))}{\partial \mathbf{y}(t)} \frac{\partial \mathbf{y}(t)}{\partial \mathbf{y}(t_0)}. \quad (2.76)$$

Die State-Transition-Matrix ist

$$\Phi(t, t_0) = \frac{\partial \mathbf{y}(t)}{\partial \mathbf{y}(t_0)} = \begin{pmatrix} \Phi_r \\ \dot{\Phi}_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}(t)}{\partial \mathbf{y}(t_0)} \\ \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}(t)}{\partial \mathbf{y}(t_0)} \end{pmatrix}. \quad (2.77)$$

Da der initiale State-Vektor  $\mathbf{y}(t_0)$  nicht von der Zeit  $t$  abhängt, kann in (2.76) die Differentiation nach der Zeit und nach dem initialen State-Vektor vertauscht werden,

$$\frac{d}{dt} \Phi(t, t_0) = \frac{\partial \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))}{\partial \mathbf{y}(t)} \Phi(t, t_0). \quad (2.78)$$

Für die partiellen Ableitungen der Geschwindigkeit des Satelliten nach dem State-Vektor  $\mathbf{y}(t)$  ergibt sich

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}(t)}{\partial \mathbf{r}(t)} = \mathbf{0}_{3 \times 3} \qquad \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}(t)}{\partial \dot{\mathbf{r}}(t)} = \mathbf{I}_{3 \times 3} \quad (2.79)$$

Damit folgen aus Gleichung (2.78) die Komponenten

$$\frac{d}{dt} \Phi(t, t_0) = \begin{pmatrix} \dot{\Phi}_r \\ \ddot{\Phi}_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \frac{\partial \mathbf{a}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})}{\partial \mathbf{r}(t)} & \frac{\partial \mathbf{a}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})}{\partial \dot{\mathbf{r}}(t)} \end{pmatrix}_{6 \times 6} \Phi(t, t_0). \quad (2.80)$$

Eine weitere Vereinfachung ergibt sich, wenn die Kraftfunktion  $\mathbf{a}$  nicht von der Geschwindigkeit des Satelliten abhängt, siehe (2.69). Die Lösung der State-Transition-Matrix wird zusammen mit der Lösung der Anfangswertaufgabe (Abschnitt 2.8) mit numerischer Integration aus

$$\ddot{\Phi}_r(t, t_0) = \frac{\partial \mathbf{a}(t, \mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}(t)} \Phi_r(t, t_0) \quad (2.81)$$

berechnet. Zum Zeitpunkt  $t_0$  (Startwert der numerischen Integration) entspricht die State-Transition-Matrix  $\Phi(t_0, t_0) = \mathbf{1}_{6 \times 6}$ . Nähere Details zu der partiellen Ableitung

## 2 Synthese – Orbitintegration

der berechneten Beschleunigung des Satelliten nach der Position bzw. zu den Elementen des Gravitationsensors, sind dem Abschnitt 3.2.1 zu entnehmen.

Die Linearisierung der Beobachtungsgleichung zur Schätzung des initialen State-Vektors eines Bahnbogens erfolgt also mit der State-Transition-Matrix, vgl. (2.73)

$$\mathbf{r}(t) - \tilde{\mathbf{r}}(t) = \Phi_r(t, t_0) \delta \mathbf{y}(t_0), \quad (2.82)$$

mit den Komponenten

$$\Phi_r(t, t_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}(t)}{\partial \mathbf{r}(t_0)} & \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}(t)}{\partial \dot{\mathbf{r}}(t_0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial x}{\partial y_0} & \frac{\partial x}{\partial z_0} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{x}_0} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_0} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{z}_0} \\ \frac{\partial y}{\partial x_0} & \frac{\partial y}{\partial y_0} & \frac{\partial y}{\partial z_0} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{x}_0} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{y}_0} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{z}_0} \\ \frac{\partial z}{\partial x_0} & \frac{\partial z}{\partial y_0} & \frac{\partial z}{\partial z_0} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{x}_0} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{y}_0} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{z}_0} \end{pmatrix}. \quad (2.83)$$

Somit ergibt sich aus (2.82) ein lineares Gleichungssystem, in der Form

$$\delta \mathbf{l} + \mathbf{v} = \mathbf{A} \delta \mathbf{y}(t_0), \quad (2.84)$$

wobei  $\delta \mathbf{l}$  den Vektor der Orbitresiduen darstellt und  $\delta \mathbf{y}(t_0)$  die zu schätzenden Zuschläge zum initialen State-Vektor. Die State-Transition-Matrix wird als Design-Matrix  $\mathbf{A}$  bezeichnet. Mit der Bedingung, dass die Quadratsumme der Verbesserungen  $\mathbf{v}$  ein Minimum bildet, kann das Normalgleichungssystem eines Bahnbogens mit

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \delta \hat{\mathbf{y}}(t_0) = \mathbf{A}^T \delta \mathbf{l} \quad (2.85)$$

angeschrieben werden. Die Beobachtungen werden als gleich genau und unkorreliert angenommen. Mit der Lösung dieses Normalgleichungssystems werden dann die Zuschläge zu den initialen State-Vektoren bestimmt. Formal erhält man die angepassten initialen State-Vektoren der entsprechenden Bahnbögen mit

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{y}}(t_0) &= \mathbf{y}(t_0) + \delta \hat{\mathbf{y}}(t_0) \\ \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{r}}(t_0) \\ \hat{\dot{\mathbf{r}}}(t_0) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{r}(t_0) \\ \dot{\mathbf{r}}(t_0) \end{pmatrix} + (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \delta \mathbf{l}. \end{aligned} \quad (2.86)$$

## 2 Synthese – Orbitintegration

Nähere Details zu der Methode der kleinsten Quadrate sind im Abschnitt 3.4 enthalten. Die Anpassung der initialen State-Vektoren erfolgt iterativ. Dabei wird der Taylorpunkt bei jedem Iterationsschritt verbessert, wobei im Fall von GOCE drei Iterationen ausreichen. Bei der Bestimmung des Gravitationsfeldes hat sich jedoch gezeigt, dass der Linearisierungsfehler bereits nach der 1. Iteration klein genug ist, wenn kurze Bahnbögen verwendet werden, siehe Abbildung 5.3. Daher ist es ausreichend, die kinematischen Positionen und die numerisch differenzierten Geschwindigkeiten des Satelliten als Näherungswerte zu verwenden.

## 3 Analyse – Gravitationsfeldbestimmung

Ziel dieser Arbeit ist es, das statische Gravitationsfeld der Erde mit einem Satelliten als Testmasse zu bestimmen. Dazu werden die berechneten Positionen aus der Synthese (Kapitel 2) mit den GPS bestimmten kinematischen Positionen verglichen und aus den Residuen werden Zuschläge zu den Näherungswerten geschätzt. Dieses Kapitel beschreibt den zweiten Schritt der Analyse der Bahnstörungen, in dem die Zuschläge zu den näherungsweise bekannten Potentialkoeffizienten des Erdgravitationsfeldes bestmöglich geschätzt werden. Die differentiellen Verbesserungen der Potentialkoeffizienten des Gravitationsfeldes werden mit einem linearisierten Modell berechnet, wobei die in der Synthese berechneten Positionen als Taylorpunkt dienen. Die durch die Lösung der Anfangswertaufgabe erhaltenen Positionen  $\tilde{\mathbf{r}}(t)$  sind nicht nur von den initialen State-Vektoren des entsprechenden Bahn Bogens  $\mathbf{y}(t_0^i)$  abhängig, sondern auch von den näherungsweise bekannten Potentialkoeffizienten des Gravitationsfeldes. Die Linearisierung der Beobachtungsgleichung erfolgt mit den Variationsgleichungen, wobei der erste Teil die Abhängigkeit von den initialen State-Vektoren mit der State-Transition-Matrix  $\Phi_r(t, t_0)$  berücksichtigt, siehe Abschnitt 2.9. Der zweite Teil berücksichtigt die Abhängigkeit von den Potentialkoeffizienten mit der Parameter-Sensitivity-Matrix  $\mathbf{S}_r(t)$ , deren Berechnung in diesem Kapitel näher beschrieben wird. Die Berechnung von  $\Phi_r(t, t_0)$  sowie von  $\mathbf{S}_r(t)$  benötigt die Bestimmung des Gravitationstensors. Weiter wird in diesem Kapitel auf die Aufstellung sowie auf die Lösung des Normalgleichungssystems eingegangen. Da in der Analyse eine große Anzahl an Parametern mitgeschätzt werden, jedoch nicht mehr explizit von Interesse sind, werden Teile der Parameter eliminiert. Die Elimination eines Teiles der Parameter betrifft vor allem die lokalen Parameter (initiale State-Vektoren), aber auch etwaige nicht deterministisch modellierbare Störeinflüsse. Diese Störeinflüsse werden als empirische Beschleunigungen bezeichnet und können optional mitgeschätzt werden. Der Arbeitsablauf der Analyse bzw. der Gravitationsfeldbestimmung ist in Abbildung 3.1 dargestellt. Die Implementierung verwendet Routinen der *Automatically Tuned Linear Algebra Software* (ATLAS)<sup>1</sup> bzw. des *Linear Algebra PACKage* von Netlib (LAPACK 3.4.1)<sup>2</sup>.

---

<sup>1</sup><http://math-atlas.sourceforge.net>

<sup>2</sup><http://www.netlib.org/lapack>

### 3 Analyse – Gravitationsfeldbestimmung

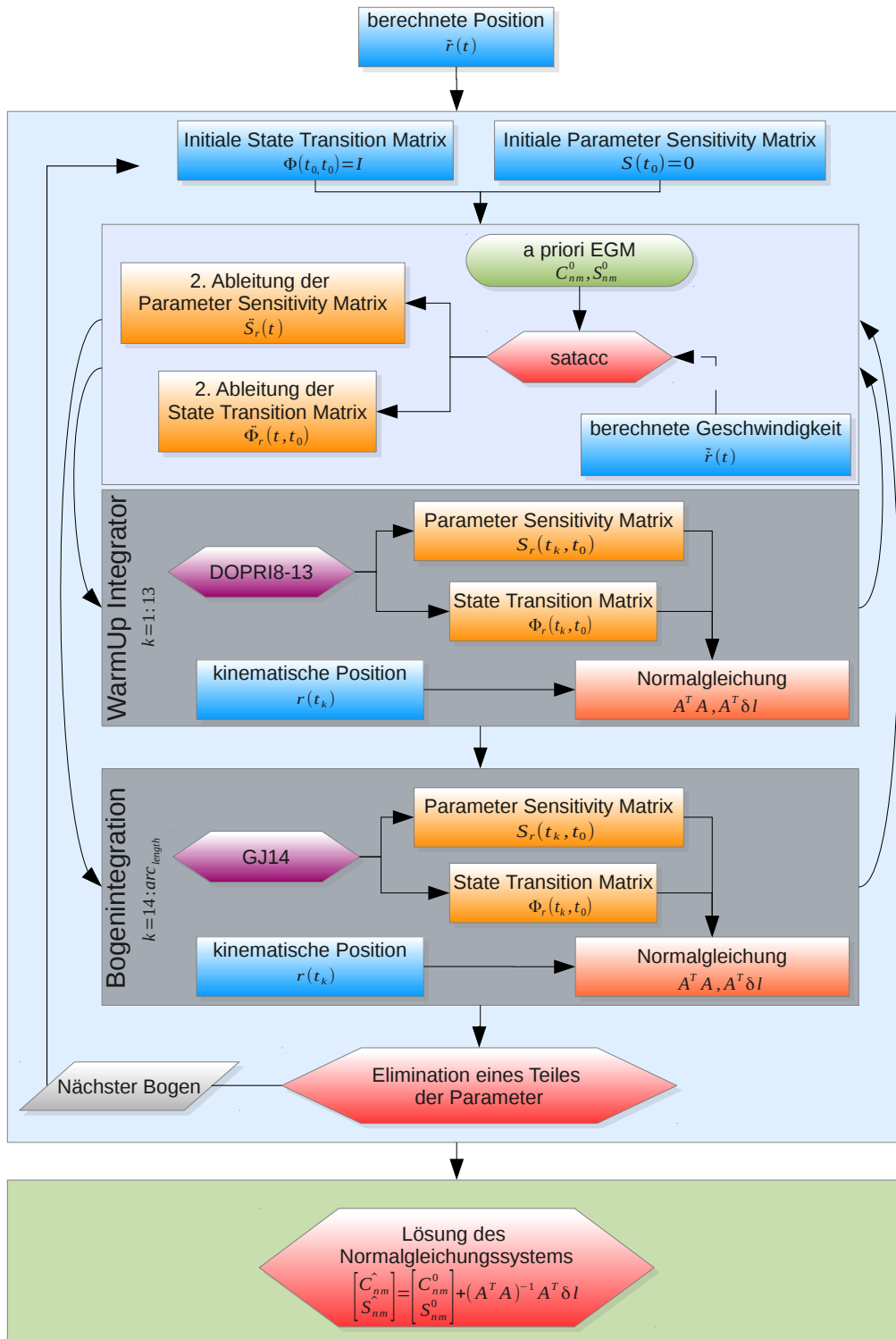


Abbildung 3.1: Arbeitsablauf der Analyse – Gravitationsfeldbestimmung

### 3.1 Linearisierung mit den Variationsgleichungen

Die Lösung der Bewegungsgleichung in Form einer Anfangswertaufgabe (Abschnitt 2.8) liefert die berechnete Position des Satelliten  $\tilde{\mathbf{r}}(t)$  in Abhängigkeit von den lokalen Parametern  $\mathbf{y}(t_0)$  und den Potentialkoeffizienten des Erdgravitationsfeldes

$$\tilde{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{p}, \mathbf{y}(t_0)), \quad (3.1)$$

wobei die Potentialkoeffizienten als globale Parameter bezeichnet werden und bis zu einem maximal gewünschten Grad  $n$  zum Vektor  $\mathbf{p}$  zusammengefasst werden

$$\mathbf{p} = (C_{20}, C_{21}, C_{22}, \dots, C_{nn}, S_{21}, S_{22}, S_{31}, \dots, S_{nn}). \quad (3.2)$$

Die Länge des Parametervektors,  $u$ , wird durch den maximalen Grad  $n_{\max}$  bestimmt

$$u = (n_{\max} + 1)^2 - 4. \quad (3.3)$$

Es können noch weitere Parameter angesetzt werden, um die nicht deterministisch modellierbaren Störeinflüsse mitzuschätzen, siehe Abschnitt 3.3. Die linearisierte Beobachtungsgleichung ergibt sich demnach aus der Taylorreihenentwicklung und dem Abbruch nach dem linearen Term,

$$\mathbf{r}(t) = \tilde{\mathbf{r}}(t) + \left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{p}} \right|_{\tilde{\mathbf{r}}} \delta \mathbf{p} + \left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{y}(t_0)} \right|_{\tilde{\mathbf{r}}} \delta \mathbf{y}(t_0), \quad (3.4)$$

vgl. (2.73) und (2.82). Die partielle Ableitung der Position nach den lokalen Parametern wird mit dem ersten Teil der Variationsgleichungen, der State-Transition-Matrix  $\Phi_r(t, t_0)$  berechnet, wobei die Zuschläge zu den initialen State-Vektoren mit  $\delta \mathbf{y}(t_0)$  bezeichnet werden, siehe Abschnitt 2.9. Die partielle Ableitung der Position nach den globalen Parametern ergibt sich aus der Parameter-Sensitivity-Matrix  $\mathbf{S}_r(t)$ , die den zweiten Teil der Variationsgleichungen darstellt, siehe Montenbruck und Gill [23]. Die zu schätzenden Zuschläge zu den Potentialkoeffizienten werden mit  $\delta \mathbf{p}$  bezeichnet. Die Berechnung der Parameter-Sensitivity-Matrix erfolgt analog zu der State-Transition-Matrix (2.76) durch

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{y}(t)}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t), \mathbf{p})}{\partial \mathbf{y}(t)} \frac{\partial \mathbf{y}(t)}{\partial \mathbf{p}} + \frac{\partial \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t), \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}}, \quad (3.5)$$

wobei die gesamte Parameter-Sensitivity-Matrix durch

$$\mathbf{S}(t) = \frac{\partial \mathbf{y}(t)}{\partial \mathbf{p}} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}(t)}{\partial \mathbf{p}} \\ \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}(t)}{\partial \mathbf{p}} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$



### 3 Analyse – Gravitationsfeldbestimmung

dargestellt wird. Somit ergeben sich analog zu (2.80) die Komponenten der Differentialgleichung der Parameter-Sensitivity-Matrix aus

$$\frac{d}{dt}\mathbf{S}(t) = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{S}}_r \\ \ddot{\mathbf{S}}_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \frac{\partial \mathbf{a}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{r}(t)} & \frac{\partial \mathbf{a}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{p})}{\partial \dot{\mathbf{r}}(t)} \end{pmatrix}_{6 \times 6} \mathbf{S}(t) + \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{3 \times u} \\ \frac{\partial \mathbf{a}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \end{pmatrix}_{6 \times u}. \quad (3.7)$$

Die Kraftfunktion  $\mathbf{a}$  ist nicht von der Geschwindigkeit des Satelliten abhängig, siehe (2.69), deshalb vereinfachen sich die Differentialgleichungen zu

$$\ddot{\Phi}_r(t, t_0) = \frac{\partial \mathbf{a}(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{r}(t)} \Phi_r(t, t_0) \quad (3.8)$$

$$\ddot{\mathbf{S}}_r(t) = \frac{\partial \mathbf{a}(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{r}(t)} \mathbf{S}_r(t) + \frac{\partial \mathbf{a}(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}}. \quad (3.9)$$

Die Lösung der Variationsgleichungen erfolgt mit numerischer Integration, wie in Abschnitt 2.8 beschrieben. Der Initialwert der State-Transition-Matrix ist  $\Phi(t_0, t_0) = \mathbf{I}_{6 \times 6}$  und für die Parameter-Sensitivity-Matrix gilt  $\mathbf{S}(t_0) = \mathbf{0}_{6 \times u}$ , weil zum Zeitpunkt  $t_0$  keine Abhängigkeit von den globalen Parametern besteht. Da die Variationsgleichungen in der Analyse (2. Schritt) separat integriert werden, ist darauf zu achten, dass die Bahnbogenlänge und das Sampling der Positionen dem der Synthese (1. Schritt) entsprechen. Dies gilt auch für das verwendete a priori Erdgravitationsfeldmodell, zumal die berechneten Positionen als Taylorpunkt verwendet werden. Den größten rechentechnischen Aufwand stellt die Integration der Variationsgleichungen dar. Aufgrund der niedrigeren Genauigkeitsanforderungen an die partielle Ableitung  $\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{r}}$ , also an den Gravitationstensor, kann jedoch ein vereinfachtes Kräftemodell verwendet werden, siehe Montenbruck und Gill [23]. In der Analyse wird der Gravitationstensor, siehe Abschnitt 3.2.1, mit den a priori Potentialkoeffizienten bis zum Grad zehn entwickelt, es werden keine anderen Störkräfte berücksichtigt. Wird der Gravitationstensor in der Synthese bis zum Grad zehn entwickelt, ergeben sich im Vergleich zur Entwicklung bis zum Grad  $n = 150$ , Differenzen im Bereich von  $10^{-7}$  m, wobei die Integralgleichungsmethode von Mayer-Gürr [20] ähnliche Differenzen zeigt. Die partielle Ableitung der Kraftfunktion nach den Potentialkoeffizienten ist im Abschnitt 3.2.2 näher beschrieben.

## 3.2 Partielle Ableitungen der Kraftfunktion

In diesem Abschnitt werden die partiellen Ableitungen, die zur Bildung der Differentialgleichung der State-Transition-Matrix  $\ddot{\Phi}_r(t, t_0)$  sowie der Parameter-Sensitivity-Matrix  $\ddot{\mathbf{S}}_r(t)$  benötigt werden, bereitgestellt. Die Berechnung erfolgt in der Subroutine `satacc`, vgl. Abbildung 3.1.

### 3.2.1 Ableitung der Kraftfunktion nach der Position – Gravitationstensor

Die Ableitung der Kraftfunktion  $\mathbf{a}$  nach der Position,  $\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{r}}$ , entspricht der 2. Ableitung des Gravitationspotentials  $V$  und wird als Gravitationstensor bezeichnet. Die Gravitationsgradienten werden im Gravitationstensor zusammengefasst. Das theoretische Konzept geht auf Antonio Marussi zurück, daher wird der Tensor 2. Ordnung auch als Marussi Tensor  $\mathbf{M}$  benannt. Die Berechnung der 9 Elemente erfolgt durch die Anwendung des Gradientenoperators  $\nabla$  auf den Gradienten des Gravitationspotentials  $\nabla V$

$$\mathbf{M}_{3 \times 3} = \nabla(\nabla V) = \nabla \otimes \nabla V, \quad (3.10)$$

mit dem dyadischen Produkt  $\otimes$ . Durch die Definition des Gradientenoperators (2.9) und dem Gradienten des Gravitationspotentials  $\nabla V(r, \varphi, \lambda)$  (2.14), parametrisiert in sphärischen Koordinaten, ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{3 \times 3} = & \left[ \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_\lambda \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \right] \otimes \\ & \frac{GM}{R^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{R}{r} \right)^{n+2} [V_r \mathbf{e}_r + V_\varphi \mathbf{e}_\varphi + V_\lambda \mathbf{e}_\lambda] \end{aligned} \quad (3.11)$$

mit

$$\begin{aligned} V_r &= -(n+1)P_{nm}(\sin \varphi) (C_{nm} \cos(m\lambda) + S_{nm} \sin(m\lambda)) \\ V_\varphi &= P'_{nm}(\sin \varphi) (C_{nm} \cos(m\lambda) + S_{nm} \sin(m\lambda)) \\ V_\lambda &= -\frac{m}{\cos \varphi} P_{nm}(\sin \varphi) (C_{nm} \sin(m\lambda) - S_{nm} \cos(m\lambda)). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Der Marussi Tensor  $\mathbf{M}_{3 \times 3}$  ist symmetrisch und besitzt eine verschwindende Spur,  $\text{tr}(\mathbf{M}_{3 \times 3}) = 0$ , da das Gravitationspotential im Außenraum quellenfrei ist und somit die Laplace Gleichung  $\Delta V = 0$  gilt, siehe Abschnitt 2.2. Daher sind nur 5 Elemente linear unabhängig. Beachtet man die Ableitungen der sphärischen Basisvektoren,

### 3 Analyse – Gravitationsfeldbestimmung

ergeben sich diese 5 Komponenten des Marussi Tensors wie folgt:

$$\begin{aligned}
 M_{rr} &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} V(r, \varphi, \lambda) = \frac{GM}{R^3} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+3} - (n+2)V_r, \\
 M_{r\varphi} &= \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} V(r, \varphi, \lambda) = \frac{GM}{R^3} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+3} - (n+2)V_\varphi, \\
 M_{r\lambda} &= \frac{\partial^2}{\partial r \partial \lambda} V(r, \varphi, \lambda) = \frac{GM}{R^3} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+3} - (n+2)V_\lambda, \\
 M_{\varphi\varphi} &= \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} V(r, \varphi, \lambda) = \frac{GM}{R^3} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+3} V_r + \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}, \\
 M_{\varphi\lambda} &= \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial \lambda} V(r, \varphi, \lambda) = \frac{GM}{R^3} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+3} \tan \varphi V_\lambda + \frac{\partial V_\lambda}{\partial \varphi}. \tag{3.13}
 \end{aligned}$$

Die partielle Ableitung  $\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}$  führt auf die 2. Ableitung der zugeordneten Legendrefunktionen  $\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} P_{nm}(\sin \varphi) = P''_{nm}(\sin \varphi)$  und die partielle Ableitung  $\frac{\partial V_\lambda}{\partial \varphi}$  wird mit der 1. Ableitung der zugeordneten Legendrefunktionen  $P'_{nm}(\sin \varphi)$  berechnet.

Durch die Erfüllung der Laplace Gleichung im Aussenraum bzw. durch die verschwindende Spur des Gravitationstensors folgt

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} V(r, \varphi, \lambda) &= - \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} V(r, \varphi, \lambda) + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} V(r, \varphi, \lambda) \right), \\
 M_{\lambda\lambda} &= -(M_{rr} + M_{\varphi\varphi}). \tag{3.14}
 \end{aligned}$$

Die restlichen Elemente ergeben sich aus der Symmetrie von  $\mathbf{M}_{3 \times 3}$ :

$$M_{\varphi r} = M_{r\varphi}, \quad M_{\lambda r} = M_{r\lambda}, \quad M_{\lambda\varphi} = M_{\varphi\lambda}. \tag{3.15}$$

Damit kann der Marussi Tensor bzw. die Ableitung der Kraftfunktion nach der Position im sphärischen lokalen Horizontsystem durch

$$\mathbf{M}(r, \varphi, \lambda) = \frac{\partial \mathbf{a}(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{r}(t)} = \begin{pmatrix} M_{rr} & M_{r\varphi} & M_{r\lambda} \\ M_{\varphi r} & M_{\varphi\varphi} & M_{\varphi\lambda} \\ M_{\lambda r} & M_{\lambda\varphi} & M_{\lambda\lambda} \end{pmatrix} \tag{3.16}$$

angeschrieben werden. Da die Normalgleichungen im Inertialsystem aufgestellt werden, muss der Tensor 2. Ordnung gemäß den Transformationsregeln zuerst in das erdfeste kartesische Referenzsystem transformiert werden und anschließend in das

### 3 Analyse – Gravitationsfeldbestimmung

kartesisches Inertialsystem. Die entsprechenden Transformationsmatrizen sind im Abschnitt 2.3 beschrieben.

$$\mathbf{M}_{\text{ef}}(x, y, z) = \mathbf{U}_{\text{lf2ef}} \mathbf{M}(r, \varphi, \lambda) \mathbf{U}_{\text{lf2ef}}^T \quad (3.17)$$

$$\mathbf{M}_{\text{if}}(X, Y, Z) = \mathbf{U}_{\text{ef2if}} \mathbf{M}_{\text{ef}}(x, y, z) \mathbf{U}_{\text{ef2if}}^T. \quad (3.18)$$

Bei der Transformation vom sphärischen lokalen Horizontsystem in das erdfeste Referenzsystem mit der Rotationsmatrix (2.22) ist auf die Reihenfolge der Basisvektoren zu achten.

Somit können die Differentialgleichungen der Variationsgleichungen  $\ddot{\Phi}_r(t, t_0)$  und  $\ddot{\mathbf{S}}_r(t)$  mit dem Gravitationstensor im Inertialsystem  $\mathbf{M}_{\text{if}}(x, y, z)$ , bzw. mit der partiellen Ableitung  $\frac{\partial \mathbf{a}(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{r}(t)}_{\text{if}}$  aufgestellt werden.

#### 3.2.2 Ableitung der Kraftfunktion nach den Potentialkoeffizienten

Für die Differentialgleichung der Parameter-Sensitivity-Matrix  $\ddot{\mathbf{S}}_r(t)$  (Abschnitt 3.1) wird die Ableitung der Kraftfunktion  $\mathbf{a}$  nach den globalen Parametern,  $\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{p}}$ , benötigt. Die globalen Parameter entsprechen den Potentialkoeffizienten bis zum gewünschten Grad  $n_{\text{max}}$ , zusammengefasst zu dem Parametervektor  $\mathbf{p}$  mit der Länge  $u$ . Die empirischen Beschleunigungen (Abschnitt 3.3), die optional mitgeschätzt werden können, werden hier nicht berücksichtigt. Die Kraftfunktion  $\mathbf{a}(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$  wird in der Synthese mit den globalen Parametern  $\mathbf{p}$  unter Berücksichtigung der Drittkörperkräfte ausgewertet. Da das statische Gravitationsfeld der Erde bestimmt werden soll, werden die Gezeiten durch Variation der Potentialkoeffizienten berücksichtigt. Daher wird die partielle Ableitung des Gradienten des Gravitationspotentials  $\nabla V(r, \varphi, \lambda)$  nach den globalen Parametern an den in der Synthese berechneten Positionen  $\tilde{\mathbf{r}}(t)$  in sphärischen Koordinaten bestimmt,

$$\frac{\partial \mathbf{a}(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} = \left( \frac{\partial \nabla V(r, \varphi, \lambda)}{\partial \mathbf{p}} \right)_{3xu}. \quad (3.19)$$

Damit ergibt sich aus Gleichung (2.14) mit den Komponenten (3.12) die partielle Ableitung im sphärischen lokalen Horizontsystem mit

$$\frac{\partial \mathbf{a}(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}}_{\text{lf}} = \frac{GM}{R^2} \left( \frac{R}{r} \right)^{n+2} \begin{pmatrix} \frac{\partial V_r}{\partial C_{nm}} & \frac{\partial V_r}{\partial S_{nm}} \\ \frac{\partial V_\varphi}{\partial C_{nm}} & \frac{\partial V_\varphi}{\partial S_{nm}} \\ \frac{\partial V_\lambda}{\partial C_{nm}} & \frac{\partial V_\lambda}{\partial S_{nm}} \end{pmatrix}_{3xu}, \quad (3.20)$$

wobei die Reihenfolge durch den globalen Parametervektor  $\mathbf{p}$  vorgegeben ist. Die Systemtransformation vom sphärischen lokalen Horizontsystem in das kartesische

Inertialsystem erfolgt analog zu (2.15) und (2.16) mit

$$\frac{\partial \mathbf{a}(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}_{\text{ef}}} = \mathbf{U}_{\text{lf2ef}} \frac{\partial \mathbf{a}(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}_{\text{lf}}} \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial \mathbf{a}(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}_{\text{if}}} = \mathbf{U}_{\text{ef2if}} \frac{\partial \mathbf{a}(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}_{\text{ef}}}. \quad (3.22)$$

Die partielle Ableitung  $\frac{\partial \mathbf{a}(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}_{\text{if}}}$  im Inertialsystem kann dann in (3.9) verwendet werden, um die Differentialgleichung der Parameter-Sensitivity-Matrix  $\ddot{\mathbf{S}}_r(t)$  zu bilden.

### 3.3 Empirische Beschleunigungen

Die nicht deterministisch modellierbaren Störeinflüsse werden als empirische Beschleunigungen bezeichnet. Die empirischen Beschleunigungen werden eingeführt um die unmodellierten Signalanteile zu absorbieren, damit diese nicht in die Lösung des Gravitationsfeldes einfließen, siehe Beutler u. a. [6]. Dieses Konzept wird mit der Einführung konstanter Beschleunigungen  $\mathbf{a}_{\text{of}}^{\text{emp}}$  im Bahnsystem, siehe Abschnitt 2.3.4, umgesetzt. Es handelt sich um Parameter, die pro Bahnbogen geschätzt werden. Das Zeitintervall, in dem die empirischen Beschleunigungen geschätzt werden, ist von großer Bedeutung, da die Gefahr besteht, dass auch Signalanteile mit Gravitationsfeldinformation absorbiert werden. Da durch die Lösung der Anfangswertaufgabe Korrelationen entstehen, erfolgt die Schätzung pro Bahnbogen und nicht in Subintervallen eines Bahnbogens. Die konstante empirische Beschleunigung im Inertialsystem ergibt sich mit der Rotationsmatrix (2.44) aus

$$\mathbf{a}_{\text{if}}^{\text{emp}} = \mathbf{U}_{\text{of2if}}(t) \mathbf{a}_{\text{of}}^{\text{emp}}. \quad (3.23)$$

Der globale Parametervektor  $\mathbf{p}$  wird um die zu schätzende konstante Beschleunigung erweitert,  $\mathbf{p}_a = \mathbf{a}_{\text{of}}^{\text{emp}}$ . Die Gesamtanzahl der Parameter ist  $u + 3$ . Die partielle Ableitung

$$\frac{\partial \mathbf{a}_{\text{if}}^{\text{emp}}}{\partial \mathbf{p}_a} = \mathbf{U}_{\text{of2if}}(t), \quad (3.24)$$

kann dann in (3.9) verwendet werden. Die Berechnung der partiellen Ableitung erfolgt mit der berechneten Geschwindigkeit des Satelliten in der Subroutine `satacc`, vgl. Abbildung 3.1. Die dadurch erzeugte Abhängigkeit der Kraftfunktion von der Geschwindigkeit wird vernachlässigt. Durch die Lösung der Differentialgleichung  $\ddot{\mathbf{S}}_r(t)$  können die konstanten empirischen Beschleunigungen pro Bahnbogen mitgeschätzt werden. Da die empirischen Beschleunigungen an sich nicht von Interesse sind, wird das Normalgleichungssystem reduziert, siehe Abschnitt 3.4.2.

## 3.4 Normalgleichungssystem

In diesem Kapitel wird die Aufstellung des Normalgleichungssystems zur Schätzung des Erdgravitationsfeldes mit der Methode der kleinsten Quadrate bereitgestellt. Weiter wird die Berechnung der Zuschläge zu den Potentialkoeffizienten bzw. die Lösung des reduzierten Normalgleichungssystems beschrieben. Das reduzierte Normalgleichungssystem resultiert aus der Elimination eines Teiles der Parameter.

### 3.4.1 Aufstellen des Normalgleichungssystems

Ausgehend von der Linearisierung durch Taylorreihenentwicklung und dem Abbruch nach dem linearen Term (3.4), kann die lineare Beobachtungsgleichung mit den Variationsgleichungen angeschrieben werden, mit

$$\mathbf{r}(t) - \tilde{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{S}_r(t)\delta\mathbf{p} + \Phi_r(t, t_0)\delta\mathbf{y}(t_0). \quad (3.25)$$

Zusammengefasst in Matrix-Vektor Notation lautet die lineare Beobachtungsgleichung

$$\mathbf{r}(t) - \tilde{\mathbf{r}}(t) = [\mathbf{S}_r(t) \quad \Phi_r(t, t_0)] \begin{pmatrix} \delta\mathbf{p} \\ \delta\mathbf{y}(t_0) \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

Wird die Inkonsistenz mit den Verbesserungen  $\mathbf{v}$  berücksichtigt, kann die lineare Verbesserungsgleichung in der bekannten Form für einen Bahnbogen  $i$

$$\delta\mathbf{l}_i + \mathbf{v}_i = \mathbf{A}_i\delta\mathbf{x}, \quad (3.27)$$

mit

$$\delta\mathbf{l}_i = \mathbf{r}_i(t) - \tilde{\mathbf{r}}_i(t), \quad \delta\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \delta\mathbf{p} \\ \delta\mathbf{y}(t_0^i) \end{pmatrix}, \quad (3.28)$$

und der Design-Matrix für den  $i$ -ten Bahnbogen mit  $k$  Beobachtungen

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i(t_1) \\ \vdots \\ \mathbf{A}_i(t_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_r(t_1) & \Phi_r(t_1, t_0^i) \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{S}_r(t_k) & \Phi_r(t_k, t_0^i) \end{bmatrix}_{(3 \cdot k) \times (u+6+3)} \quad (3.29)$$

angeschrieben werden. Der zu schätzende Parametervektor  $\delta\mathbf{x}$  beinhaltet die lokalen sowie die globalen Parameter und  $\delta\mathbf{l}_i$  bezeichnet die Orbitresiduen. Gilt für den Erwartungswert der Verbesserungen  $E(\mathbf{v}) = 0$ , bzw. kann angenommen werden, dass es sich bei den Verbesserungen  $\mathbf{v}$  um zufällige Fehler handelt, kann das überbestimmte Gleichungssystem mit der Methode der kleinsten Quadrate gelöst

### 3 Analyse – Gravitationsfeldbestimmung

werden. Die Bedingung der Lösung ist die Minimierung der Quadratsumme der Verbesserungen

$$\mathbf{v}^T \mathbf{v} \rightarrow \min, \quad (3.30)$$

wobei die Beobachtungen als gleichgenau und unkorreliert angenommen werden. Die Kofaktorenmatrix der Beobachtungen wird also mit

$$\Sigma(\mathbf{l}) = \mathbf{I}\sigma^2 \quad (3.31)$$

angenommen, wobei  $\sigma^2$  die Gewichtseinheitsvarianz ist. Die Bedingung (3.30) führt auf das Normalgleichungssystem

$$\mathbf{N}\delta\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{n} \quad \text{mit} \quad \mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{A} \quad \text{und} \quad \mathbf{n} = \mathbf{A}^T \delta\mathbf{l}. \quad (3.32)$$

Die gesamte Normalgleichungsmatrix  $\mathbf{N}$  wird mit allen Beobachtungen der entsprechenden Bahnbögen durch Summation aufgestellt, wobei die Anzahl der Beobachtungen eines Bahnbogens mit  $k$  bezeichnet wird und die Anzahl der Bahnbögen mit  $b$  gekennzeichnet ist. Somit gilt für die Normalgleichungsmatrix

$$\mathbf{N} = \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^k \mathbf{A}_i(t_j)^T \mathbf{A}_i(t_j) \quad (3.33)$$

und analog gilt für die rechte Seite die Matrix-Vektor Multiplikation

$$\mathbf{n} = \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^k \mathbf{A}_i(t_j)^T \delta\mathbf{l}_i(t_j). \quad (3.34)$$

Dadurch ist nur die Design-Matrix  $\mathbf{A}$  zu jedem Zeitpunkt  $t$  aufzustellen und danach das Produkt der Form  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  mit der LAPACK Funktion *DSYRK* zu bilden. Die LAPACK Funktion *DSYRK* berechnet das sogenannte Rang  $k$  Update von  $\mathbf{A}$ , die anschließende Summation wird auch von der Funktion übernommen.

Da die Normalgleichungen der Anfangswerte der entsprechenden Bahnbögen  $i = 1, \dots, b$  untereinander unkorreliert sind, folgt die symmetrische positiv definite Normalgleichungsmatrix der Form (Kaula [16]),

$$\mathbf{N} = \left( \begin{array}{c|cccc} \mathbf{N}_{11} & \mathbf{N}_{12,1} & \mathbf{N}_{12,2} & \dots & \mathbf{N}_{12,b} \\ \mathbf{N}_{21,1} & \mathbf{N}_{22,1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{N}_{21,2} & \mathbf{0} & \mathbf{N}_{22,2} & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{N}_{21,b} & \mathbf{0} & \dots & & \mathbf{N}_{22,b} \end{array} \right), \quad (3.35)$$

wobei der Block  $\mathbf{N}_{11}$  den Normalgleichungen der globalen Parametern entspricht. Die Blöcke  $\mathbf{N}_{22,ii}$  entsprechen den Normalgleichungen der lokalen Parameter des entsprechenden Bahnbogens  $i$ . Die Dimension dieser Matrix ist

$$\dim(\mathbf{N}) = (u + (6 + 3) \cdot b) \times (u + (6 + 3) \cdot b). \quad (3.36)$$

### 3 Analyse – Gravitationsfeldbestimmung

Aufgrund dieser enormen Größe wird die Normalgleichungsmatrix reduziert. Vor allem, da die initialen State-Vektoren in der Analyse nicht mehr von Interesse sind. So kann unnötiger Rechenaufwand vermieden werden und Arbeitsspeicher eingespart werden. Die Reduktion der Normalgleichungsmatrix entspricht der Elimination eines Teiles der Parameter. Die Verwendung der empirischen Beschleunigungen ist optional. Da jedoch das Konzept der empirischen Beschleunigungen darauf abzielt, die unmodellierten Signalanteile zu absorbieren (Abschnitt 3.3) und die numerischen Werte selbst nicht interessieren, werden diese Parameter auch eliminiert, siehe Abschnitt 3.4.2.

Die Lösung des Normalgleichungssystems ist in Abschnitt 3.4.3 näher beschrieben.

#### 3.4.2 Elimination eines Teiles der Parameter

Es werden Parameter in das Parametermodell aufgenommen, deren numerische Werte nicht oder nicht mehr von Interesse sind. Solche Parameter sind die initialen State-Vektoren der entsprechenden Bahnbögen, also die lokalen Parameter sowie die empirischen Beschleunigungen, die den globalen Parametern zuzuordnen sind. In den meisten Fällen übersteigt die Anzahl dieser Parameter sogar die Anzahl der gesuchten Potentialkoeffizienten des Erdgravitationsfeldes, daher werden diese Teile der Parameter aus dem Gleichungssystem eliminiert. Die Beobachtungen werden als unkorreliert und gleichgenau angenommen. Die lineare Verbesserungsgleichung eines Bahn bogens (3.27) wird in zwei Teile aufgeteilt,

$$\delta \mathbf{l} + \mathbf{v} = \mathbf{A}_1 \delta \mathbf{p} + \mathbf{A}_2 \delta \mathbf{y}(t_0). \quad (3.37)$$

Somit lautet das Normalgleichungssystem, vgl. (3.32), eines Bahn bogens  $i$ ,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_2^T \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2^T \mathbf{A}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \mathbf{p} \\ \delta \mathbf{y}(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^T \delta \mathbf{l} \\ \mathbf{A}_2^T \delta \mathbf{l} \end{pmatrix},$$

$$\left( \begin{array}{c|c} \mathbf{N}_{11} & \mathbf{N}_{12} \\ \mathbf{N}_{21} & \mathbf{N}_{22} \end{array} \right) \begin{pmatrix} \delta \hat{\mathbf{x}}_1 \\ \delta \hat{\mathbf{x}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{n}_1 \\ \mathbf{n}_2 \end{pmatrix}. \quad (3.38)$$

Die Blöcke der lokalen Parameter  $\mathbf{N}_{22}$  entsprechen den einzelnen Bahnbögen und sind untereinander unkorreliert, vgl.(3.35). Der Block  $\mathbf{N}_{11}$  ist den gesuchten Potentialkoeffizienten bzw. den globalen Parametern zuzuordnen, auf die Parameterelimination der empirischen Beschleunigungen wird später in diesem Abschnitt eingegangen. Damit können die Komponenten des Normalgleichungssystems durch

$$\mathbf{N}_{11} \delta \hat{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{N}_{12} \delta \hat{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{n}_1, \quad (3.39)$$

$$\mathbf{N}_{21} \delta \hat{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{N}_{22} \delta \hat{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{n}_2, \quad (3.40)$$



### 3 Analyse – Gravitationsfeldbestimmung

angeschrieben werden. Es wird die zweite Gleichung (3.40) betrachtet und nach dem Parametervektor, der die zu eliminierenden lokalen Parameter enthält, umgeformt. Existiert die Inverse  $\mathbf{N}_{22}^{-1}$ , so ist

$$\delta\hat{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{N}_{22}^{-1}(\mathbf{n}_2 - \mathbf{N}_{21}\delta\hat{\mathbf{x}}_1) = \mathbf{N}_{22}^{-1}\mathbf{n}_2 - \mathbf{N}_{22}^{-1}\mathbf{N}_{21}\delta\hat{\mathbf{x}}_1. \quad (3.41)$$

Setzt man den Parametervektor  $\delta\hat{\mathbf{x}}_2$  (3.41) in die erste Gleichung des Normalgleichungssystems (3.39) ein, ergibt sich

$$\mathbf{N}_{11}\delta\hat{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{N}_{12}\mathbf{N}_{22}^{-1}\mathbf{n}_2 - \mathbf{N}_{12}\mathbf{N}_{22}^{-1}\mathbf{N}_{21}\delta\hat{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{n}_1, \quad (3.42)$$

wobei das Herausheben von  $\delta\hat{\mathbf{x}}_1$  die finale Form liefert

$$(\mathbf{N}_{11} - \mathbf{N}_{12}\mathbf{N}_{22}^{-1}\mathbf{N}_{21})\delta\hat{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{n}_1 - \mathbf{N}_{12}\mathbf{N}_{22}^{-1}\mathbf{n}_2, \quad (3.43)$$

vgl. Kaula [16]. Somit kann das reduzierte Normalgleichungssystem mit

$$\tilde{\mathbf{N}}_{11} = \mathbf{N}_{11} - \mathbf{N}_{12}\mathbf{N}_{22}^{-1}\mathbf{N}_{21} \quad (3.44)$$

$$\tilde{\mathbf{n}}_1 = \mathbf{n}_1 - \mathbf{N}_{12}\mathbf{N}_{22}^{-1}\mathbf{n}_2 \quad (3.45)$$

angeschrieben werden. Die Reduktion bzw. die Elimination der lokalen Parameter wird nach jedem Bahnbogen durchgeführt, siehe Abbildung 3.1.

Mathematisch handelt es sich bei der Elimination der Parameter  $\delta\hat{\mathbf{x}}_2$  um eine Projektion der Gleichung (3.37) in den zu  $\mathbf{A}_2$  orthogonalen Raum. Mit der Projektionsmatrix

$$\Pi_{\mathbf{A}_2}^\perp = \mathbf{I} - \Pi_{\mathbf{A}_2} = \mathbf{I} - \mathbf{A}_2(\mathbf{A}_2^T\mathbf{A}_2)^{-1}\mathbf{A}_2^T \quad (3.46)$$

ergibt sich die Projektion der Verbesserungsgleichung aus

$$\underbrace{\Pi_{\mathbf{A}_2}^\perp\delta\bar{\mathbf{l}}}_{\delta\bar{\mathbf{l}}} + \underbrace{\Pi_{\mathbf{A}_2}^\perp\mathbf{v}}_{\bar{\mathbf{v}}} = \underbrace{\Pi_{\mathbf{A}_2}^\perp\mathbf{A}_1}_{\bar{\mathbf{A}}_1}\delta\mathbf{p} + \underbrace{\Pi_{\mathbf{A}_2}^\perp\mathbf{A}_2}_{=0}\delta\mathbf{y}(t_0). \quad (3.47)$$

Der reduzierte Verbesserungsvektor  $\bar{\mathbf{v}}$  ist identisch mit dem ursprünglichen Verbesserungsvektor  $\mathbf{v}$ , somit kann die Verbesserungsgleichung des reduzierten Systems

$$\delta\bar{\mathbf{l}} + \bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{A}}_1\delta\mathbf{p}, \quad (3.48)$$

verwendet werden, um die Zuschläge der Potentialkoeffizienten mit der Methode der kleinsten Quadrate zu schätzen. Diese Lösung entspricht der Lösung mit dem reduzierten Normalgleichungssystem (3.44) und (3.45). Details zur Lösung des Normalgleichungssystems sind im Abschnitt 3.4.3 enthalten.

Die Elimination eines Teiles der Parameter hat also auch Einfluss auf das Skalarprodukt der Beobachtungen  $\mathbf{l}^T\mathbf{l}$ , das benötigt wird um die Kovarianzmatrix der

### 3 Analyse – Gravitationsfeldbestimmung

geschätzten Parameter  $\Sigma(\hat{\mathbf{x}})$  bzw. die formalen Fehler zu bestimmen. Die formalen Fehler werden über die direkte Berechnung der Quadratsumme der Verbesserungen ermittelt, siehe Abschnitt 3.4.3. Für das Skalarprodukt der Beobachtungen  $\mathbf{1}^T \mathbf{1}$  gilt somit durch die Elimination der Parameter, siehe Ehrig und Nowak [10],

$$\hat{\mathbf{1}}^T \hat{\mathbf{1}} = \mathbf{1}^T \mathbf{1} - \mathbf{n}_2^T \mathbf{N}_{22}^{-1} \mathbf{n}_2. \quad (3.49)$$

#### Implementierung der Elimination eines Teiles der Parameter

Da die Normalgleichungsmatrix symmetrisch und positiv definit ist, erfolgt die Implementierung nach Ehrig und Nowak [10] mit der Cholesky Zerlegung von  $\mathbf{N}_{22}$  in eine obere Dreiecksmatrix

$$\mathbf{N}_{22} = \mathbf{U}^T \mathbf{U}. \quad (3.50)$$

Verwendet wird die LAPACK Routine *DPOTRF*. Daraus ergibt sich dann mit Gleichung (3.44), folgender Ausdruck für die Reduktion der Normalgleichungsmatrix,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{N}}_{11} &= \mathbf{N}_{11} - \mathbf{N}_{12} (\mathbf{U}^T \mathbf{U})^{-1} \mathbf{N}_{21} \\ &= \mathbf{N}_{11} - \mathbf{N}_{12} \mathbf{U}^{-1} \mathbf{U}^{-T} \mathbf{N}_{12}^T \\ &= \mathbf{N}_{11} - (\mathbf{U}^{-T} \mathbf{N}_{12}^T)^T \mathbf{U}^{-T} \mathbf{N}_{12}^T. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Das Produkt der Dreiecksmatrix  $\mathbf{U}^{-T}$  mit  $\mathbf{N}_{21}$  wird mit der LAPACK Routine *DTRSM* berechnet, wobei diese Funktion das Gleichungssystem  $\mathbf{U}^T \mathbf{X} = \mathbf{N}_{21}$  nach  $\mathbf{X}$  auflöst. Damit wird effizient die Matrix  $\mathbf{U}^{-T} \mathbf{N}_{21}$  ermittelt. Anschließend ist noch das Rang  $k$  Update dieser Matrix mit *DSYRK* zu bestimmen, vgl. Abschnitt 3.4.1. Ausgehend von (3.45) wird die rechte Seite  $\mathbf{n}_1$  reduziert. Somit folgt mit der Cholesky faktorierten Matrix (3.50)

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{n}}_1 &= \mathbf{n}_1 - \mathbf{N}_{12} (\mathbf{U}^T \mathbf{U})^{-1} \mathbf{n}_2 \\ &= \mathbf{n}_1 - \mathbf{N}_{12} \mathbf{U}^{-1} \mathbf{U}^{-T} \mathbf{n}_2 \\ &= \mathbf{n}_1 - (\mathbf{U}^{-T} \mathbf{N}_{12}^T)^T \mathbf{U}^{-T} \mathbf{n}_2, \end{aligned} \quad (3.52)$$

wobei  $\mathbf{U}^{-T} \mathbf{n}_2$  mit der LAPACK Routine *DTRSV* berechnet wird. Die LAPACK Routine *DTRSV*, stellt das vektorielle Gegenstück zu der LAPACK Routine *DTRSM* dar. Anschließend wird das Matrix-Vektor Produkt mit der Transponierten Matrix  $(\mathbf{U}^{-T} \mathbf{N}_{12}^T)^T$  gebildet, die Matrix wurde bereits in (3.51) bestimmt.

Die Reduktion des Skalarproduktes der Beobachtungen (3.49) ergibt sich durch die

### 3 Analyse – Gravitationsfeldbestimmung

Cholesky Faktorisierung der Matrix  $\mathbf{N}_{22}$  (3.50) aus

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{I}}^T \tilde{\mathbf{I}} &= \mathbf{1}^T \mathbf{1} - \mathbf{n}_2^T (\mathbf{U}^T \mathbf{U})^{-1} \mathbf{n}_2 \\ &= \mathbf{1}^T \mathbf{1} - \mathbf{n}_2^T \mathbf{U}^{-1} \mathbf{U}^{-T} \mathbf{n}_2 \\ &= \mathbf{1}^T \mathbf{1} - (\mathbf{U}^{-T} \mathbf{n}_2)^T \mathbf{U}^{-T} \mathbf{n}_2.\end{aligned}\quad (3.53)$$

Damit ist nur noch das Skalarprodukt, des aus (3.52) bereits bekannten Vektors  $\mathbf{U}^{-T} \mathbf{n}_2$  mit sich selbst zu berechnen.

#### Elimination eines Teiles der globalen Parameter

Die empirischen Beschleunigungen zählen zu den globalen Parametern. Durch die in Abschnitt 3.3 beschriebene Berechnung sind die empirischen Beschleunigungen von den Anfangswerten abhängig, jedoch bahnbogenweise unkorreliert. Daher kann die Schätzung bzw. Elimination analog zu den lokalen Parametern nach jedem Bahnbogen erfolgen. Um diese globalen Parameter mitzuschätzen, wird das Normalgleichungssystem um die konstanten empirischen Beschleunigungen erweitert. Die Erweiterung betrifft den Block der globalen Parameter  $\mathbf{N}_{11}$  in (3.38), daher gilt für einen Bahnbogen

$$\left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{N}_{11} & \mathbf{N}_{1a} & \mathbf{N}_{12} \\ \mathbf{N}_{a1} & \mathbf{N}_{aa} & \mathbf{N}_{a2} \\ \mathbf{N}_{21} & \mathbf{N}_{2a} & \mathbf{N}_{22} \end{array} \right) \begin{pmatrix} \delta \hat{\mathbf{x}}_1 \\ \delta \hat{\mathbf{x}}_a \\ \delta \hat{\mathbf{x}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{n}_1 \\ \mathbf{n}_a \\ \mathbf{n}_2 \end{pmatrix}. \quad (3.54)$$

Die Elimination der Parameter erfolgt durch die Zusammenfassung des zu schätzenden Parametervektors der empirischen Beschleunigungen  $\delta \hat{\mathbf{x}}_a$  und des Parametervektors des initialen State-Vektors  $\delta \hat{\mathbf{x}}_2$  zu einem Vektor

$$\delta \hat{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} \delta \hat{\mathbf{x}}_a \\ \delta \hat{\mathbf{x}}_2 \end{pmatrix}. \quad (3.55)$$

Werden die Matrizen entsprechend zusammengefasst, ergibt sich das Normalgleichungssystem,

$$\left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{N}_{11} & \mathbf{N}_{1a} & \mathbf{N}_{12} \\ \mathbf{N}_{a1} & \mathbf{N}_{aa} & \mathbf{N}_{a2} \\ \mathbf{N}_{21} & \mathbf{N}_{2a} & \mathbf{N}_{22} \end{array} \right) \begin{pmatrix} \delta \hat{\mathbf{x}}_1 \\ \delta \hat{\mathbf{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{n}_1 \\ \mathbf{n}_a \\ \mathbf{n}_2 \end{pmatrix}. \quad (3.56)$$

Da keine Korrelation der empirischen Beschleunigungen zwischen den Bahnbögen auftritt, kann die Elimination der entsprechenden globalen Parameter pro Bahnbogen durchgeführt werden. Mit den zusammengefassten Matrizen (3.56) werden die empirischen Beschleunigungen sowie die lokalen Parameter durch (3.51) und (3.52) aus dem Normalgleichungssystem eliminiert.

### 3.4.3 Lösung des Normalgleichungssystems

Das Normalgleichungssystem nach der Elimination der Parameter lautet

$$\tilde{\mathbf{N}}_{11} \delta \hat{\mathbf{x}}_1 = \tilde{\mathbf{n}}_1, \quad (3.57)$$

wobei die Lösung dieses überbestimmten Gleichungssystem die beste lineare erwartungstreue Schätzung darstellt. Die Beobachtungen werden als gleich genau und unkorreliert angenommen, siehe Kofaktorenmatrix der Beobachtungen (3.31). Der globale Parametervektor  $\delta \hat{\mathbf{x}}_1$  wird formal durch

$$\delta \hat{\mathbf{x}}_1 = \tilde{\mathbf{N}}_{11}^{-1} \tilde{\mathbf{n}}_1 \quad (3.58)$$

bestimmt. Da die reduzierte Normalgleichungsmatrix  $\tilde{\mathbf{N}}_{11}$  eine symmetrische positiv definite Matrix ist, wird der globale Parametervektor bzw. die Zuschläge zu den Potentialkoeffizienten des Erdgravitationsfeldes durch das Cholesky Verfahren berechnet. Dazu wird die LAPACK Routine *DPOSV* verwendet. Die gesuchten Potentialkoeffizienten des Erdgravitationsfeldes  $\hat{C}_{nm}$  und  $\hat{S}_{nm}$  werden dann mit den Näherungswerten aus

$$\begin{pmatrix} \hat{C}_{nm} \\ \hat{S}_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{nm}^0 \\ S_{nm}^0 \end{pmatrix} + \delta \hat{\mathbf{x}}_1. \quad (3.59)$$

ermittelt, wobei  $C_{nm}^0$  und  $S_{nm}^0$  die Potentialkoeffizienten des a priori Erdgravitationsfeldmodelles bezeichnen.

Die Kovarianzmatrix der geschätzten Parameter ergibt sich dann aus

$$\Sigma(\hat{\mathbf{x}}) = \tilde{\mathbf{N}}_{11}^{-1} \hat{\sigma}^2, \quad (3.60)$$

wobei  $\hat{\sigma}^2$  die a posteriori Gewichtseinheitsvarianz darstellt. Diese Varianz der Gewichtseinheit wird aus den Verbesserungen  $\mathbf{v}$  und der Anzahl der Beobachtungen  $\eta$  sowie der geschätzten Parameter  $\mu$  durch

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{v}}{\eta - \mu} \quad (3.61)$$

bestimmt. Der Verbesserungsvektor ergibt sich aus der Verbesserungsgleichung (3.27)

$$\mathbf{v} = \mathbf{A} \delta \hat{\mathbf{x}}_1 - \delta \mathbf{l} = \delta \hat{\mathbf{l}} - \delta \mathbf{l}, \quad (3.62)$$

mit den ausgeglichenen Beobachtungen  $\delta \hat{\mathbf{l}}$ . Da die Design-Matrix  $\mathbf{A}$  zu jedem Zeitpunkt neu berechnet wird und das Normalgleichungssystem durch Akkumulation aufgestellt wird, vgl. Gleichung (3.33) bzw. (3.34), erfolgt die Berechnung der Quadratsumme der Verbesserungen  $\mathbf{v}^T \mathbf{v}$  direkt. Aus Gleichung (3.62) folgt, dass  $\mathbf{v}^T \mathbf{v}$  mit

### 3 Analyse – Gravitationsfeldbestimmung

dem Skalarprodukt der Beobachtungen berechnet werden kann. Somit ergibt sich mit dem reduzierten Skalarprodukt der Beobachtungen (3.49) die Quadratsumme der Verbesserungen aus

$$\mathbf{v}^T \mathbf{v} = \tilde{\mathbf{l}}^T \tilde{\mathbf{l}} - \tilde{\mathbf{n}}_1^T \tilde{\mathbf{N}}_{11}^{-1} \tilde{\mathbf{n}}_1 = \tilde{\mathbf{l}}^T \tilde{\mathbf{l}} - \tilde{\mathbf{n}}_1^T \delta \hat{\mathbf{x}}_1. \quad (3.63)$$

Damit kann die Kovarianzmatrix der geschätzten Parameter  $\boldsymbol{\Sigma}(\hat{\mathbf{x}})$  bestimmt werden. Die formalen Fehler entsprechen der Quadratwurzel der Diagonalelemente der Kovarianzmatrix der geschätzten Parameter,  $\sqrt{\text{diag } \boldsymbol{\Sigma}(\hat{\mathbf{x}})}$ .

## 4 Prozessierung der GOCE Realdaten

In dieser Arbeit wird der kinematische Orbit der Satellitenmission GOCE zur Erdgravitationsfeldbestimmung verwendet. Dieses Kapitel geht auf die verwendeten Realdaten sowie auf die Vorverarbeitung dieser Daten ein. Nach dieser Vorverarbeitung erfolgt die Bestimmung des Erdgravitationsfeldes durch die im Rahmen dieser Arbeit implementierte Software **ANKOR** (**A**nalyse **k**inematischer **O**rbits). Die Software generiert in der Synthese (Kapitel 2) aus den Näherungswerten den Taylorpunkt für die Analyse. Anschließend werden in der Analyse (Kapitel 3) die Potentialkoeffizienten des Erdgravitationsfeldes mit dem linearisierten Modell geschätzt. Damit ist die Analyse kinematischer Orbits mit Variationsgleichungen zum Zwecke der Gravitationsfeldbestimmung abgeschlossen. Weiter beschäftigt sich dieses Kapitel mit dem Vergleich verschiedener Gravitationsfeldlösungen.

### 4.1 Kinematische GOCE Orbits

Die *Precise Science Orbits* der GOCE Mission werden über das ESA (European Space Agency) Level 2 Produkt SST\_PS0\_2\_ bereitgestellt, siehe Gruber u. a. [13], wobei ausschließlich der kinematische Orbit verwendet wird. Im Gegensatz zum ebenfalls bereitgestellten reduziert dynamischen Orbit, wird der kinematische Orbit rein geometrisch aus den GPS Beobachtungen bestimmt. Die Berechnung erfolgt durch die *Precise Orbit Determination* (POD) innerhalb der GOCE *High-level Processing Facility*, siehe Bock u. a. [7]. Es sind die kinematischen Positionen im erdfesten Referenzsystem sowie die Transformation in das Inertialsystem in Form von Quaternionen gegeben, vgl. Abschnitt 2.3.3. Die konstante Samplingrate beträgt  $\Delta t = 1$  s. In dieser Arbeit wird der kinematische Orbit im Inertialsystem als Referenzorbit bezeichnet. Die Analyse des Referenzorbits wird für den Zeitraum vom 01.11.2009 bis 31.12.2009 durchgeführt. Für Sensitivitätsstudien wird aus laufzeittechnischen Gründen indes eine Periode von 30 Tagen, der Zeitraum vom 01.11.2009 bis 30.11.2009, analysiert, siehe Kapitel 5. Der folgende Abschnitt beschreibt die Vorverarbeitung des kinematischen Orbits.

## 4.2 Vorverarbeitung der Daten

Die initialen State-Vektoren der einzelnen Bahnbögen beinhalten neben der kinematischen Position auch die Geschwindigkeit des Satelliten. Die Ableitung der Geschwindigkeit aus den kinematischen Positionen erfolgt mit numerischer Differentiation und wird im Abschnitt 4.2.1 näher angeführt. Anschließend folgt die Detektion von groben Ausreißern auf Ebene der Beschleunigung des Satelliten, siehe Abschnitt 4.2.2. Die Berechnung der Beschleunigungen aus den kinematischen Positionen erfolgt ebenfalls mit numerischer Differentiation.

### 4.2.1 Numerische Differentiation

Die numerische Differentiation der kinematischen Positionen  $\mathbf{r}(t)$  wird mit der Ableitung eines stückweise angepassten Polynoms berechnet, siehe Mayer-Gürr [20]. Es wird also ein Polynom vom Grad  $M$  stückweise an die diskreten gleichabständigen Zeitpunkte  $t_k$  des kinematischen Orbits angepasst

$$\mathbf{r}(\tau) = \sum_{n=0}^M \tau^n \boldsymbol{\alpha}_n. \quad (4.1)$$

Das Interpolationspolynom mit den Polynomkoeffizienten  $\boldsymbol{\alpha}_n$  wird durch  $M + 1$  Stützstellen eindeutig festgelegt. Die Zeitvariable  $\tau$  ergibt sich aus dem geraden Polynomgrad  $M$  und dem konstanten Sampling des kinematischen Orbits  $\Delta t$  und beschreibt mit  $t_k + \tau$  die Zeitpunkte der beteiligten Stützstellen. Somit kann das angepasste Interpolationspolynom für den mittleren Zeitpunkt wie folgt angeschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r}(t_k + \tau_0) \\ \vdots \\ \mathbf{r}(t_k + \tau_M) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \tau_0 & \tau_0^2 & \dots & \tau_0^M \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \tau_M & \tau_M^2 & \dots & \tau_M^M \end{pmatrix}}_{\mathbf{W}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_0 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_M \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \tau_j = (j - \frac{M}{2})\Delta t. \quad (4.2)$$

Die Polynomkoeffizienten werden aus der Lösung des Gleichungssystems (4.2) bestimmt mit

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_0 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_M \end{pmatrix} = \mathbf{W}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{r}(t_k + \tau_0) \\ \vdots \\ \mathbf{r}(t_k + \tau_M) \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\alpha}_n = \sum_{j=0}^M w_{nj} \mathbf{r}(t_k + \tau_j). \quad (4.3)$$

## 4 Prozessierung der GOCE Realdaten

Die Elemente der inversen Matrix werden mit  $w_{nj}$  bezeichnet. Setzt man nun die Polynomkoeffizienten in (4.1) ein, dann ergibt sich

$$\mathbf{r}(\tau) = \sum_{n=0}^M \tau^n \sum_{j=0}^M w_{nj} \mathbf{r}(t_k + \tau_j). \quad (4.4)$$

Da die Geschwindigkeit des Satelliten berechnet werden soll, wird die 1. Ableitung von (4.4) nach der Zeit gebildet,

$$\dot{\mathbf{r}}(\tau) = \sum_{n=1}^M n\tau^{n-1} \sum_{j=0}^M w_{nj} \mathbf{r}(\tau_j). \quad (4.5)$$

Die 2. Ableitung von (4.4) nach der Zeit liefert die Beschleunigung des Satelliten,

$$\ddot{\mathbf{r}}(\tau) = \sum_{n=2}^M n(n-1)\tau^{n-2} \sum_{j=0}^M w_{nj} \mathbf{r}(t_k + \tau_j). \quad (4.6)$$

Diese numerisch differenzierte Beschleunigung wird für die Detektion grober Ausreißer verwendet, siehe Abschnitt 4.2.2.

Es wird der Polynomgrad  $M = 8$  verwendet, siehe Austen und Reubelt [2], Mayer-Gürr [20] oder Baur u. a. [5]. Das Polynom wird im mittleren Stützpunkt, also an der Stelle  $\tau = 0$  ausgewertet, da besonders an den Rändern ein Schwingen des Polynoms auftritt. Somit vereinfacht sich die Berechnung der Geschwindigkeit (4.5) für einen Zeitpunkt  $t_k$  auf

$$\dot{\mathbf{r}}(0) = \sum_{j=0}^M w_{1j} \mathbf{r}(t_k + \tau_j). \quad (4.7)$$

Die numerisch differenzierte Beschleunigung (4.6) zum Zeitpunkt  $t_k$  vereinfacht sich zu

$$\ddot{\mathbf{r}}(0) = \sum_{j=0}^M 2w_{2j} \mathbf{r}(t_k + \tau_j). \quad (4.8)$$

Die Auswertung entspricht der Anwendung eines Differentiationsfilters. Der Filterkern  $[w_{1j}]$  für die 1. Ableitung und der Filterkern  $[2w_{2j}]$  für die 2. Ableitung wird punktweise bis zum Ende des Bahnbogens verschoben. Am Beginn und am Ende jedes Bahnbogens werden  $\frac{M}{2}$  Zeitpunkte verworfen.

Die Geschwindigkeit des Satelliten kann demnach aus der Anwendung des Differentiationsfilters gemäß (4.7) berechnet werden, um die initialen State-Vektoren der Bahnbögen aufzubauen.



### 4.2.2 Detektion von groben Ausreißern

Die Detektion von groben Ausreißern wird durch den Vergleich der numerisch differenzierten Beschleunigungen (4.6) mit vorwärts gerechneten Beschleunigungen realisiert. Die vorwärts gerechneten Beschleunigungen werden dabei wie im Kapitel 2 beschrieben an den kinematischen Positionen  $\mathbf{r}(t)$  mit einem Erdgravitationsfeld berechnet. Die Ausreißerschranke und das Erdgravitationsfeldmodell sollten so gewählt werden, dass die Gravitationsfeldlösung von der Ausreißerdetektion unabhängig ist. Daher wird für die Berechnung der Beschleunigungen das Modell EGM96 (Lemoine u. a. [17]) verwendet. Es ist also keine Gravitationsfeldinformation von GRACE enthalten. Das Modell EGM96 wird bis zum Grad  $n = 10$  verwendet. Auf die Modellierung der Drittkörperkräfte und Gezeiten kann ebenso verzichtet werden, da die Ausreißerschranke groß genug gewählt wird. Die Ausreißerschranke wird in etwa mit dem 15-fachen RMS der Residuen angenommen. Es werden mit einer Ausreißerschranke von  $\varepsilon = 0.5 \text{ m s}^{-2}$  weniger als 0.01% der Daten als Ausreißer detektiert und eliminiert. Nach jedem detektierten Ausreißer beginnt ein neuer Bahnbogen. Die Abbildung 4.1 zeigt die Residuen der Ausreißerdetektion des kinematischen GOCE Orbits. Die numerische Differentiation verstärkt das hochfrequente Rauschen des kinematischen Orbits, vgl. Baur u. a. [5].

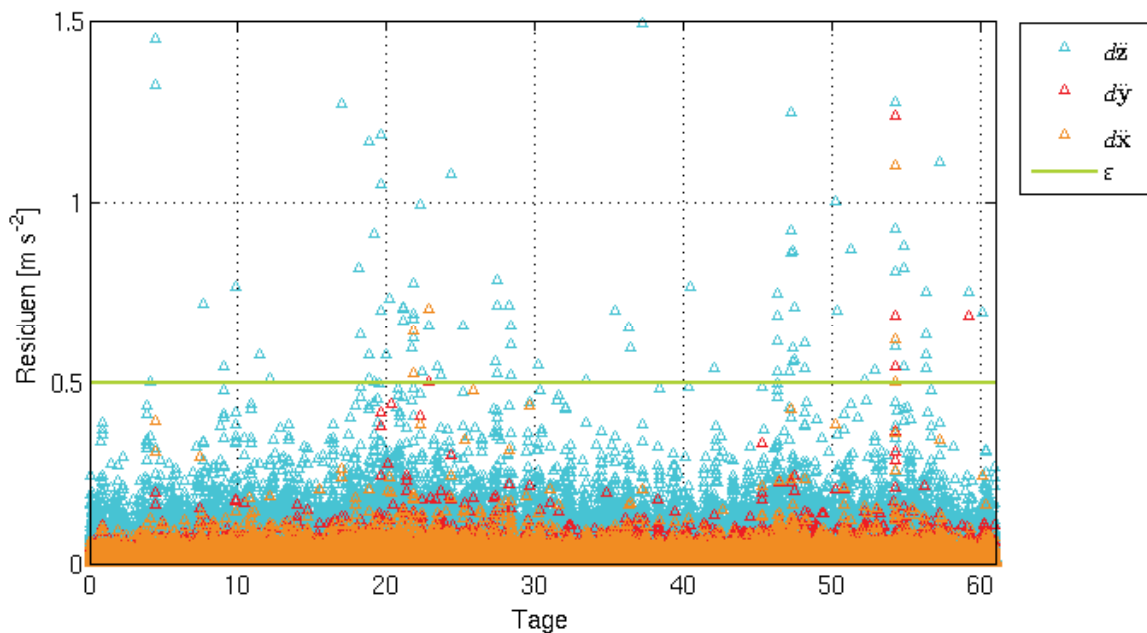


Abbildung 4.1: Residuen der Beschleunigungen innerhalb der Ausreißerdetektion des kinematischen GOCE Orbits (61 Tage)

Sensitivitätstests haben gezeigt, dass mit der Ausreißerschranke von  $0.5 \text{ m s}^{-2}$  die groben Ausreißer eliminiert werden. Mit einer Ausreißerschranke von  $\varepsilon = 0.1 \text{ m s}^{-2}$ , das entspricht dem dreifachen RMS der Residuen, werden zwar 0.6% der Daten eliminiert, jedoch vergleichbare Ergebnisse erzielt.

### 4.3 Vergleich der Gravitationsfeldlösungen

Nach der Bestimmung der Gravitationsfeldlösung mit den vorverarbeiteten Realdaten, soll die Qualität dieser Lösung analysiert werden. Dazu wird ein Vergleich mit einem statischen hochgenauen Erdgravitationsfeldmodell durchgeführt. Im Folgenden wird die GRACE-only Gravitationsfeldlösung ITG-Grace2010s (Mayer-Gürr u. a. [21]) als Referenzmodell verwendet.

Ausgehend vom Gravitationspotential  $V$  wird meist das Störpotential  $T$  betrachtet. Da es sich um eine kleine Größe handelt, werden Schwerefeldgrößen meist als Funktionale des Störpotentials dargestellt. Das Störpotential ist die Differenz des Gravitationspotentials  $V$  und dem Normalpotential  $U$  eines Referenzellipsoids (z. B. GRS80),

$$T = V - U. \quad (4.9)$$

Die Geoidhöhe  $N$  entspricht der Abweichung des Geoids von einem Referenzellipsoid und wird mit der Formel von BRUNS,

$$N = \frac{T}{\gamma}, \quad (4.10)$$

berechnet (Heiskanen und Moritz [14]). Die Normalschwere  $\gamma$  wird durch die sphärische Approximation erhalten,

$$\gamma \approx \frac{GM}{R^2}. \quad (4.11)$$

Durch die Orthogonalitätsbeziehungen der Kugelflächenfunktionen lässt sich die spektrale Leistungsdichte (PSD) der Gravitationsfeldlösung pro Grad mit den Gradvarianzen  $\sigma_n^2$  darstellen,

$$\sigma_n^2 = \sum_{m=0}^n (C_{nm}^2 + S_{nm}^2). \quad (4.12)$$

Die Varianz des Störpotentials  $\sigma^2(T)$  wird durch die Multiplikation mit dem Dimensionsträger berechnet

$$\sigma^2(T) = \left(\frac{GM}{R}\right)^2 \sum_{n=2}^{\infty} \sigma_n^2. \quad (4.13)$$

#### 4 Prozessierung der GOCE Realdaten

Somit erhält man durch die Anwendung der Formel von *BRUNS* und (4.11) die Varianz der Geoidhöhen aus

$$\sigma^2(N) = R^2 \sum_{n=2}^{\infty} \sigma_n^2. \quad (4.14)$$

Der Vergleich mit der Referenzlösung ( $C_{nm}^{\text{ref}}, S_{nm}^{\text{ref}}$ ) erfolgt mit den sogenannten Fehlergradvarianzen

$$\Delta\sigma_n^2 = \sum_{m=0}^n \left( (C_{nm}^{\text{ref}} - \hat{C}_{nm})^2 + (S_{nm}^{\text{ref}} - \hat{S}_{nm})^2 \right). \quad (4.15)$$

Der Durchschnittswert des Signals pro Grad wird durch den RMS der Fehlergradvarianzen (DE-RMS<sub>n</sub>) ausgedrückt. Für die Geoidhöhen ergibt sich

$$\text{DE-RMS}_n(N) = R \sqrt{\frac{1}{2n+1} \Delta\sigma_n^2}. \quad (4.16)$$

Der DE-RMS<sub>n</sub> als Funktion der Geoidhöhen gibt die Übereinstimmung der Gravitationsfeldlösungen im Spektralbereich an.

Aufgrund des Orbitdesigns der Satellitenmission GOCE mit einer Inklination von 96.7° gibt es keine Beobachtungen in der Polarregion. Dieses Polloch spiegelt sich auch im RMS der Fehlergradvarianzen wider, daher werden die Ordnungen  $m < 5$  in der Berechnung des DE-RMS<sub>n</sub> vernachlässigt, siehe Baur u. a. [4]. Der DE-RMS<sub>n</sub> berechnet sich mit der Berücksichtigung des Polloch-Problems mit

$$\text{DE-RMS}_n(N) = R \sqrt{\frac{1}{2n-8} \sum_{m=5}^n \left( (C_{nm}^{\text{ref}} - \hat{C}_{nm})^2 + (S_{nm}^{\text{ref}} - \hat{S}_{nm})^2 \right)}. \quad (4.17)$$

Diese Formel wird für die folgenden Vergleiche der Gravitationsfeldlösungen verwendet.

## 5 Ergebnisse

Die mit der implementierten Software **ANKOR** erzielten Ergebnisse werden in diesem Kapitel vorgestellt. Diesbezüglich werden die Einflüsse der verwendeten Parameter untersucht und im Abschnitt 5.1 angeführt. Um die Auswirkung der einzelnen Parameter zu ermitteln, wird der kinematische Orbit von GOCE, auch als Referenzorbit bezeichnet, für einen Zeitraum von 30 Tagen analysiert. Anschließend werden zwei finale GOCE Gravitationsfeldlösungen präsentiert, die mit dem Referenzorbit für den Zeitraum vom 01.11.2009 bis 31.12.2009 (61 Tage) berechnet werden. Abschließend erfolgt ein Vergleich der finalen Gravitationsfeldlösungen mit der externen Lösung von Baur u. a. [5], berechnet mit dem Beschleunigungsansatz.

### 5.1 Einfluss der verwendeten Parameter

Nach der Vorverarbeitung des Referenzorbits, siehe Abschnitt 4.2, erfolgt die Synthese. Die Berechnung der Positionen aus den Näherungswerten kann iterativ erfolgen, indem die initialen State-Vektoren der entsprechenden Bahnbögen verbessert werden. Die Anzahl der benötigten Iterationen sowie die Abhängigkeit der Gravitationsfeldlösung vom a priori Erdgravitationsfeldmodell werden in diesem Abschnitt untersucht. Weiter wird auf Aliasing Effekte eingegangen, die durch die hochfrequenten Anteile des Gravitationsfeldes entstehen. Auf das Polloch-Problem wird in Abschnitt 5.1.4 eingegangen. Weitere wählbare Verfahrensparameter sind die Samplingrate und die Bahnbogenlänge.

Nach der Berechnung der Synthese erfolgt die Analyse, wobei dasselbe a priori Erdgravitationsfeldmodell als Näherungsfeld verwendet wird. Das gilt auch für die verwendete Samplingrate sowie für die Bahnbogenlänge. Der Einfluss dieser Parameter wird im Folgenden gezeigt. In der Analyse können auch empirische Beschleunigungen mitgeschätzt werden. Der Einfluss dieser (konstanten) empirischen Beschleunigungen wird mit unterschiedlicher Bahnbogenlänge untersucht.

Die geschätzten Potentialkoeffizienten werden mit dem Gravitationsfeldmodell ITG-Grace2010s (Mayer-Gürr u. a. [21]) verglichen und in Form des RMS der Fehlergradvarianzen dargestellt, siehe Abschnitt 4.3. Zur Vereinfachung wird im Folgenden der RMS der Fehlergradvarianzen vom Grad  $n$  mit  $DE-RMS_n$  bezeichnet.

### 5.1.1 Iterative Schätzung der Anfangswerte

Da die Beobachtungsgleichungen nicht linear sind, erfolgt die Gravitationsfeldbestimmung in der Analyse mit einem linearisierten Modell. Die in der Synthese berechneten Positionen werden als Taylorpunkt verwendet, somit wird die Gravitationsfeldlösung von einem Linearisierungsfehler verzerrt, der von der Qualität des Taylorpunktes abhängig ist. Daher kann eine iterative Anpassung der initialen State-Vektoren an den beobachteten Referenzorbit erfolgen, siehe Abschnitt 2.9.

Der initiale State-Vektor der einzelnen Bahnbögen besteht in der 1. Iteration der Synthese aus der über GPS bestimmten kinematischen Position und aus der mit den kinematischen Positionen numerisch differenzierten Geschwindigkeit des Satelliten. Die Abbildung 5.1 zeigt die Residuen des beobachteten Referenzorbits zu dem numerisch integrierten Orbit nach der 1. Iteration. Der numerisch integrierte Orbit wurde mit dem a priori Erdgravitationsfeldmodell EGM96 (Lemoine u. a. [17]) bis zum Grad 150 berechnet. Die Samplingrate wurde mit 5 s gewählt und die maximale Bahnbogenlänge beträgt 30 min. Es ist anzumerken, dass nach jedem Ausreißer ein neuer Bahnbogen beginnt, deshalb sind viele Bahnbögen kürzer als die maximale Bahnbogenlänge. Die initialen State-Vektoren der 1. Iteration stellen bereits eine gute Näherung dar, wobei eine iterative Anpassung der initialen State-Vektoren die Residuen deutlich verkleinert. Die Abbildung 5.2 stellt die Residuen nach der 3. Iteration der Synthese, berechnet mit denselben Verfahrensparametern, dar. Nach der 3. Iteration stellt sich keine weitere Verbesserung der initialen State-Vektoren ein.

## 5 Ergebnisse

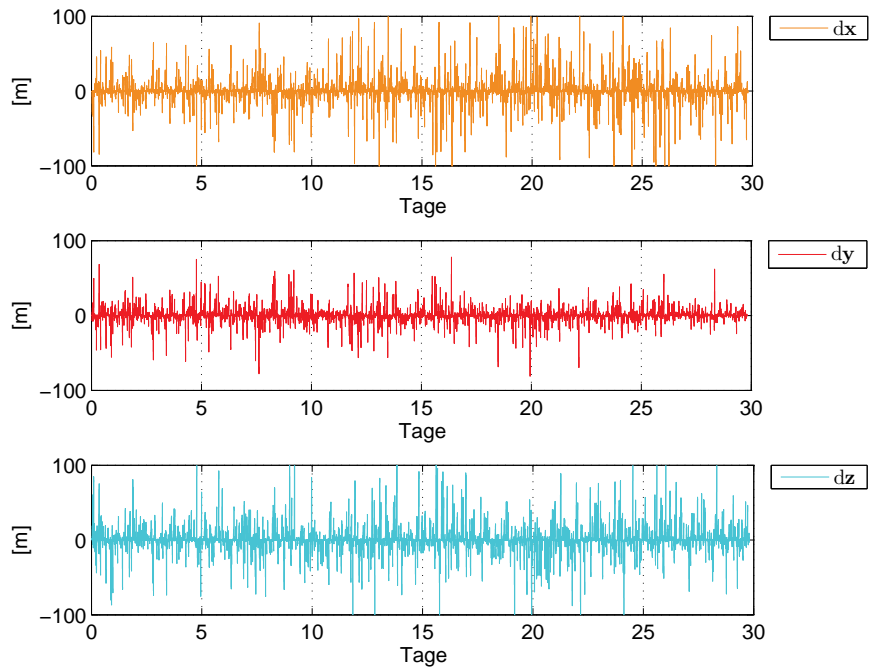


Abbildung 5.1: Residuen nach der 1. Iteration mit EGM96 als Näherungsfeld bis Grad 150 mit einer maximalen Bahnbogenlänge von 30 min und einer Samplingrate von 5 s

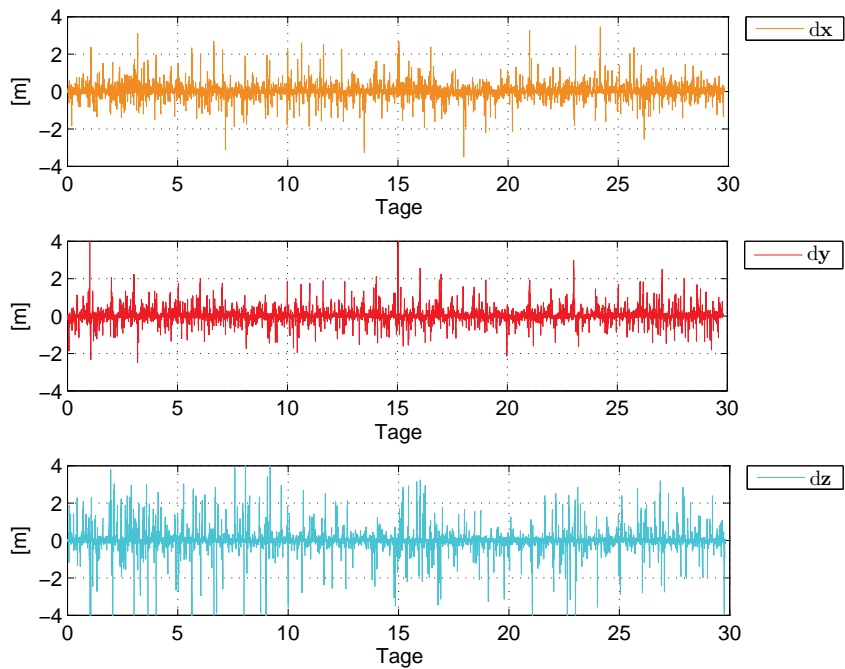


Abbildung 5.2: Residuen nach der 3. Iteration mit EGM96 als Näherungsfeld bis Grad 150 mit einer maximalen Bahnbogenlänge von 30 min und einer Samplingrate von 5 s

## 5 Ergebnisse

Aus den Residuen nach der 1. Iteration (Abbildung 5.1) sowie aus den Residuen nach der 3. Iteration (Abbildung 5.2) werden die Potentialkoeffizienten bis zum Grad  $n = 90$  geschätzt.

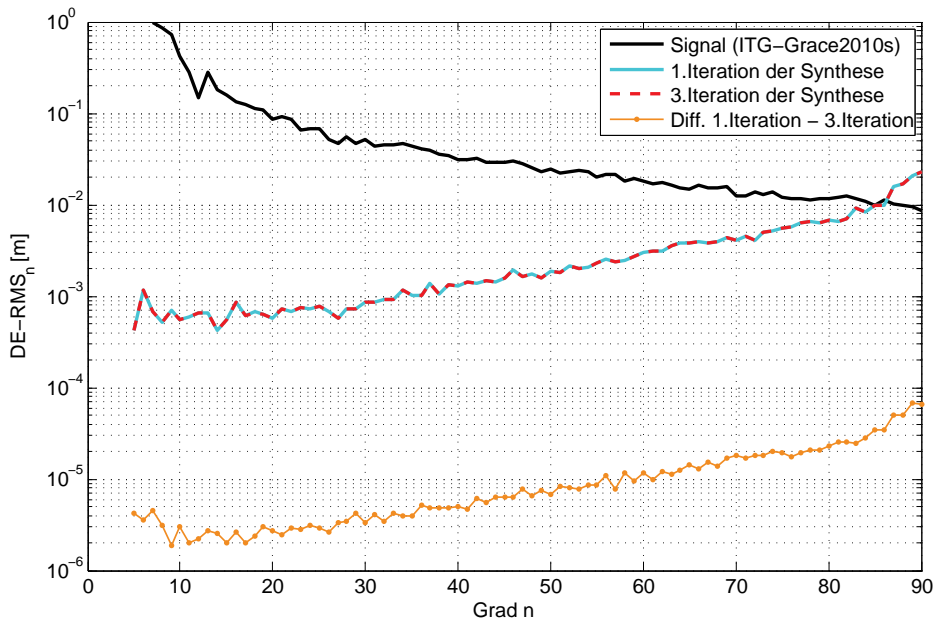


Abbildung 5.3: Ergebnisse der Analyse des kinematischen Orbits (30 Tage) mit unterschiedlicher Anzahl der Iterationen der Synthese (max. Bahnbogenlänge 30 min, Samplingrate 5 s)

Die Abbildung 5.3 visualisiert die geschätzten Potentialkoeffizienten. Es zeigt sich, dass der Linearisierungsfehler bereits nach der 1. Iteration klein genug ist, da sich die beiden Lösungen kaum voneinander unterscheiden, obwohl die Orbitresiduen nach der 3. Iteration um zwei Größenordnungen kleiner sind. Die unterschiedlichen Samplingraten (1 s, 5 s und 10 s) und die untersuchten Bahnbogenlängen (15 min, 30 min, 90 min und 1 Tag) wirken sich nicht auf den Linearisierungsfehler aus.

Daher ist es für die Gravitationsfeldbestimmung ausreichend die kinematischen Positionen und die numerisch differenzierten Geschwindigkeiten des Satelliten als Näherungswerte zu verwenden. Es ist somit kein iteratives Verfahren notwendig.

### 5.1.2 A priori Erdgravitationsfeldmodell

Die Berechnung des integrierten Orbits ist auch von den a priori Näherungswerten der Potentialkoeffizienten abhängig. Um die Residuen nach 3 Iterationen noch weiter

## 5 Ergebnisse

zu minimieren, wird das kombinierte hochgenaue Erdgravitationsfeldmodell GO-CO02s (Goiginger u. a. [11]) als Näherungsfeld verwendet. Die erhaltenen Orbitresiduen nach 3 Iterationen sind der Abbildung 5.4 zu entnehmen.

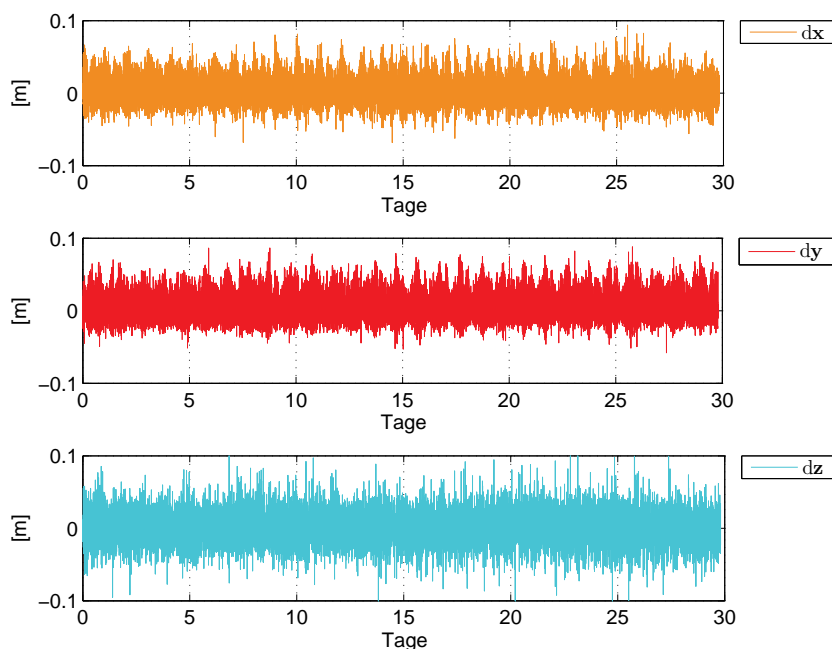


Abbildung 5.4: Residuen nach der 3. Iteration mit GOCO02s als Näherungsfeld bis Grad 150 mit max. Bahnbogenlänge 30 min und Samplingrate 5 s

Die aus den Orbitresiduen (Abbildung 5.4) geschätzten Potentialkoeffizienten unterscheiden sich nur geringfügig von den Potentialkoeffizienten, die aus den Residuen nach einer Iteration und dem Modell EGM96 als Näherungsfeld, siehe Abbildung 5.1, berechnet wurden. Somit kann bestätigt werden, dass der Linearisierungsfehler nach einer Iteration ausreichend klein ist. Die Abbildung 5.5 (durchgezogene Linie) zeigt den DE-RMS<sub>n</sub> der berechneten Potentialkoeffizienten. Auf die gestrichelte Linie wird im Abschnitt 5.1.3 eingegangen.



## 5 Ergebnisse

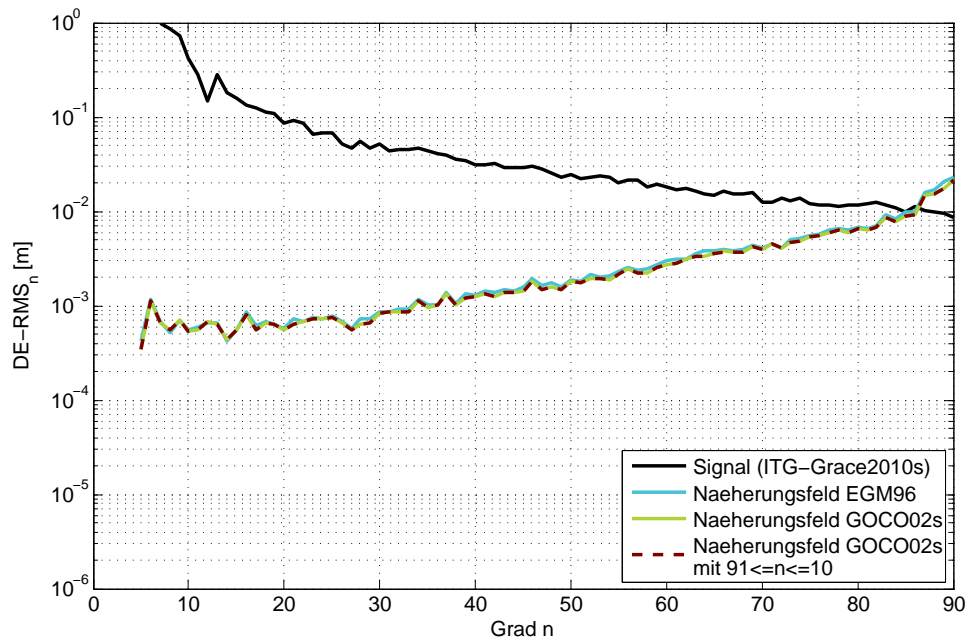


Abbildung 5.5: Ergebnisse der Analyse des kinematischen Orbits (30 Tage) mit unterschiedlichen a priori Erdgravitationsfeldmodellen und 3 Iterationen der Synthese (max. Bahnbogenlänge 30 min, Samplingrate 5 s)

### 5.1.3 Aliasing Effekte

Die hochfrequenten Anteile des Gravitationsfeldes können aufgrund der mit der spektralen Auflösung in etwa quadratisch zunehmenden Anzahl der unbekannt Parameter nur mit einem sehr hohem rechentechnischem Aufwand geschätzt werden, siehe Abschnitt 3.4.1. Die Potentialkoeffizienten werden daher bis zum Grad  $n = 90$  in der Analyse geschätzt. Vernachlässigt man die hochfrequenten Anteile des Gravitationsfeldes ab Grad  $n = 91$ , so treten sowohl in der Synthese als auch in der Analyse Aliasing Effekte auf. Darum wird das a priori Näherungsfeld in der Synthese bis zum Grad  $n = 150$  berücksichtigt. Die Abbildung 5.6 zeigt den  $DE-RMS_n$  der geschätzten Potentialkoeffizienten berechnet mit dem Näherungsfeld EGM96, wobei in der Synthese einerseits bis zum Grad  $n = 90$  aufgelöst wird und andererseits die hochfrequenten Anteile bis zum Grad  $n = 150$  berücksichtigt werden. Wie in der Abbildung ersichtlich, treten die Aliasing Effekte entlang des gesamten Spektrums auf, wobei der Bereich ab dem Grad  $n \approx 85$  besonders betroffen ist. Die Verwendung einer höheren spektralen Auflösung ( $n > 150$ ) in der Synthese bewirkt keine Verbesserung der berechneten Gravitationsfeldlösungen.

## 5 Ergebnisse

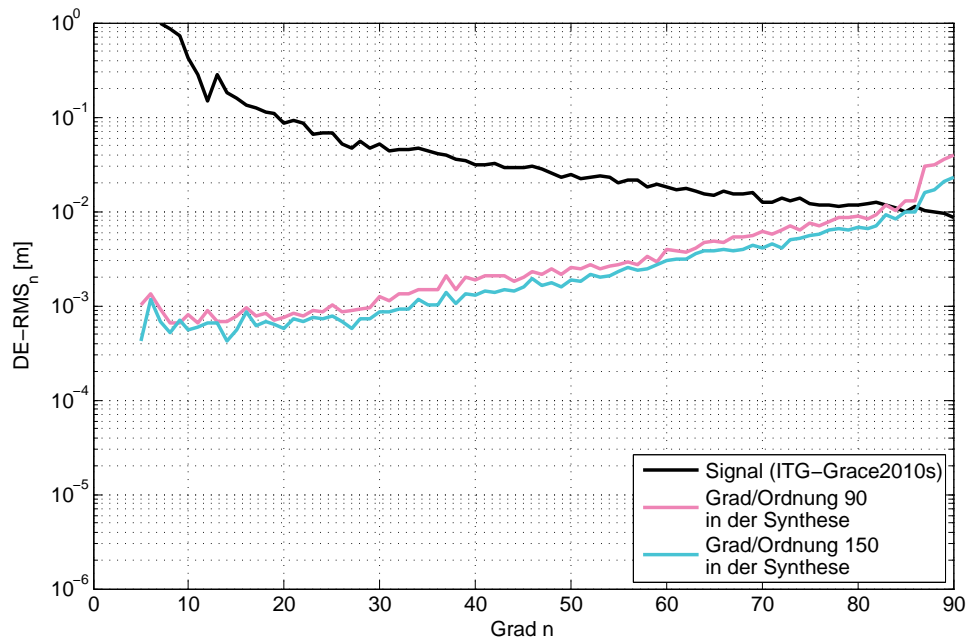


Abbildung 5.6: Ergebnisse der Analyse des kinematischen Orbits (30 Tage) mit unterschiedlicher Berücksichtigung der hochfrequenten Anteile in der Synthese (max. Bahnbogenlänge 30 min, Samplingrate 5 s)

Für eine weitere Untersuchung wird das Erdgravitationsfeldmodell GOCO02s unter Verwendung der Grade  $91 \leq n \leq 10$  als Näherungsfeld verwendet. Der entsprechende Verlauf des  $DE-RMS_n$  in der Abbildung 5.5 (gestrichelte Linie) zeigt einerseits die Unabhängigkeit der berechneten Gravitationsfeldlösungen vom a priori Erdgravitationsfeldmodell. Andererseits wird deutlich, dass die Berücksichtigung der hochfrequenten Anteile des Gravitationsfeldes ab dem Grad  $n = 91$  einen größeren Einfluss auf die Gravitationsfeldlösung hat, als die Größenordnung der Residuen. Dies gilt insbesondere, da die Potentialkoeffizienten nur bis zum Grad  $n = 90$  in der Analyse geschätzt werden.

### 5.1.4 Problem der polaren Datenlücken

Durch das Orbitdesign der Satellitenmission GOCE sind keine Beobachtungen in den Polarregionen verfügbar. Dieses Beobachtungsloch an den Polen spiegelt sich in den geschätzten Potentialkoeffizienten wider. Daher werden in dieser Arbeit die Ordnungen  $m < 5$  in der Berechnung des  $\text{DE-RMS}_n$  vernachlässigt, siehe Formel (4.17). In der Abbildung 5.7 ist die Gravitationsfeldlösung aus Abschnitt 5.1.3 (hellblaue Linie) für alle Ordnungen bzw. für die Ordnungen  $m > 4$  dargestellt.

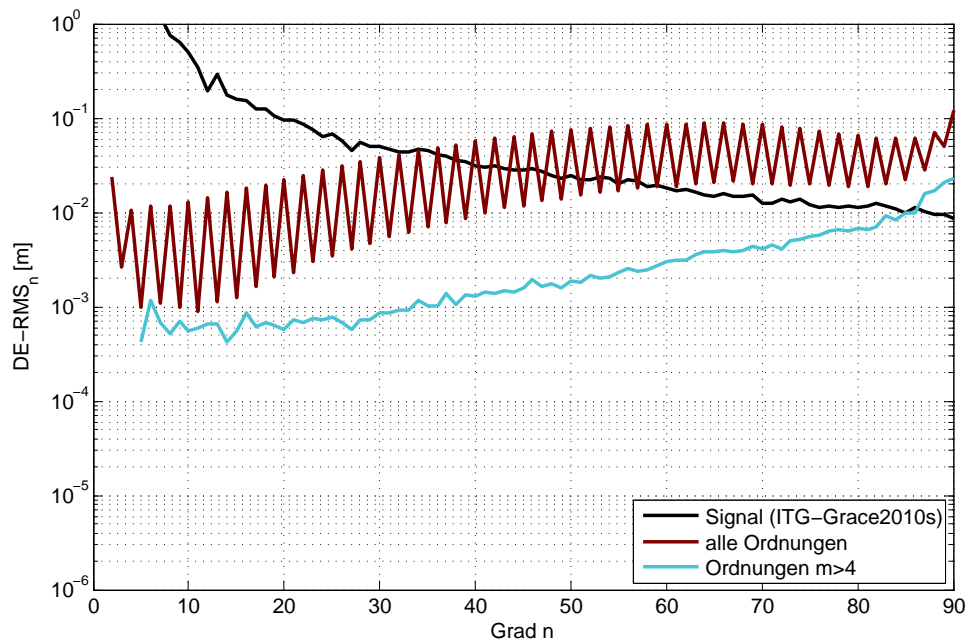


Abbildung 5.7: Ergebnisse der Analyse des kinematischen Orbits (30 Tage), einerseits alle Ordnungen berücksichtigt und andererseits Ordnungen  $m < 5$  vernachlässigt (max. Bahnbogenlänge 30 min, Samplingrate 5 s)

Eine weitere Visualisierung des Polloch-Problems erfolgt mit dem Betrag der geschätzten Potentialkoeffizienten zu den Potentialkoeffizienten des Modells ITG-Grace2010s. Das Koeffizientendreieck in Abbildung 5.8a zeigt, dass die niedrigen Ordnungen deutlich schlechter bestimmt werden können. Deshalb wird hier auf die Darstellung der Ordnungen  $m < 5$  verzichtet, siehe Koeffizientendreieck in Abbildung 5.8b. Es werden alle Ordnungen in der Analyse mitgeschätzt, die Ordnungen werden lediglich in der Berechnung des  $\text{DE-RMS}_n$  vernachlässigt.

## 5 Ergebnisse

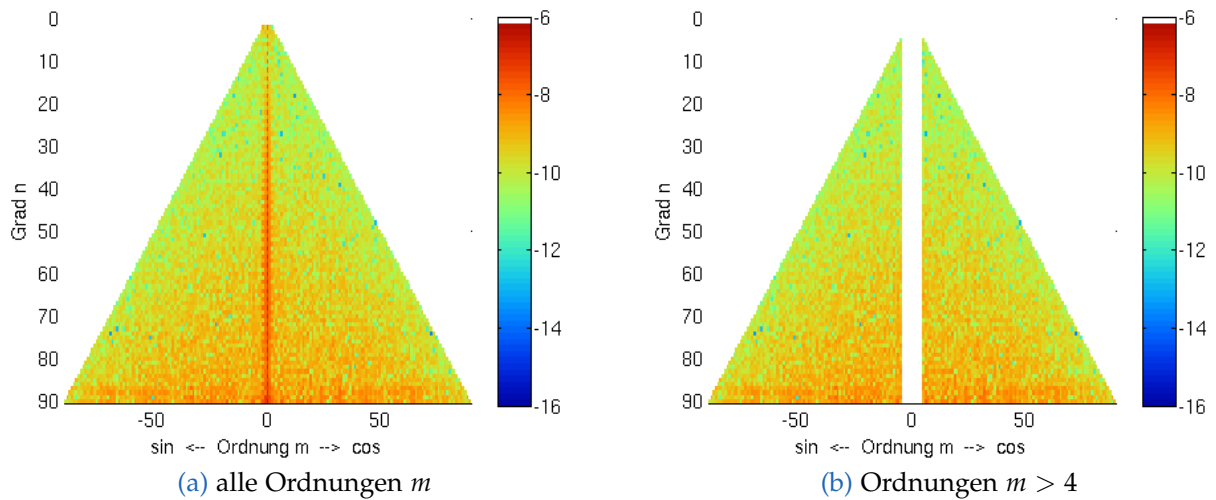


Abbildung 5.8: Betrag der Differenz der geschätzten Potentialkoeffizienten zum Modell ITG-Grace2010S

### 5.1.5 Samplingrate

Ein weiterer wählbarer Verfahrensparameter ist die Samplingrate bei der Integration, abgesehen davon, dass der kinematische Orbit von GOCE mit einem konstanten Sampling von  $\Delta t = 1$  s gegeben ist. Um einen Interpolationsschritt der beobachteten kinematischen Positionen zu vermeiden, ist die kleinste untersuchte Samplingrate 1 s. Es ist dieselbe Samplingrate in der Synthese (Integration des Orbits), als auch in der Analyse (Integration der Variationsgleichungen) zu verwenden, siehe Montenbruck und Gill [23]. Die Gravitationsfeldlösungen werden wiederum mit dem Modell EGM96 als Näherungsfeld berechnet, wobei in der Synthese bis Grad  $n = 150$  aufgelöst wird. Die maximale Bahnbogenlänge ist 30 min. Der Einfluss der unterschiedlichen Samplingraten ist in der Abbildung 5.9 dargestellt. Erwartungsgemäß stellt sich heraus, dass die Samplingrate von 10 s den größten Fehler zeigt, vor allem im mittel- und kurzwelligen Bereich. Die Verwendung der Samplingraten 1 s und 5 s zeigt ähnliche Fehler. Daher wird die Samplingrate von 5 s hinsichtlich der rechentechnischen Performance verwendet. Weiter ist anzumerken, dass bei längeren Bahnbögen die Erhöhung der Samplingrate zu einer stärkeren Verschlechterung führt.

## 5 Ergebnisse

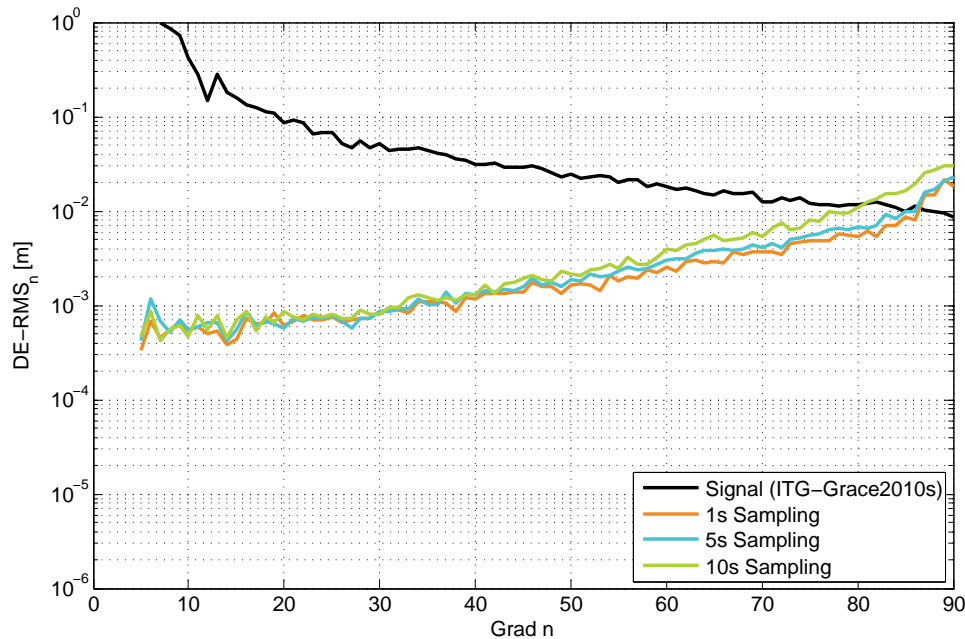


Abbildung 5.9: Ergebnisse der Analyse des kinematischen Orbits (30 Tage) mit unterschiedlicher Samplingrate (max. Bahnbogenlänge 30 min)

### 5.1.6 Bahnbogenlänge

Die numerische Bahnintegration sowie die Integration der Variationsgleichungen bzw. die Bestimmung des statischen Gravitationsfeldes der Erde wird mit kurzen Bahnbögen durchgeführt. Das bringt den Vorteil, dass durch die Aufteilung in kurze Bahnbögen die Auswirkung der nicht modellierbaren Bahnstörungen geringer ist und der Umgang mit Datenlücken vereinfacht wird, siehe Abschnitt 2.8.1. Nach jeder Datenlücke und nach jedem Ausreißer beginnt ein neuer Bahnbogen, daher variiert die Bahnbogenlänge und es wird nur die maximale Bahnbogenlänge angegeben. In der Synthese und in der Analyse wird dieselbe maximale Bahnbogenlänge verwendet. Um die Wahl der Bahnbogenlänge zu untersuchen, werden Gravitationsfeldlösungen mit einer Samplingrate von 5 s und dem Modell EGM96 als Näherungsfeld berechnet. In der Synthese wird das a priori Näherungsfeld bis Grad  $n = 150$  berücksichtigt.

Die Abbildung 5.10 zeigt Gravitationsfeldlösungen mit unterschiedlicher maximaler Bahnbogenlänge. Die maximale Bahnbogenlänge von 90 min (ca. ein Bahnbogen pro Umlauf) zeigt ähnlich große Fehler wie die maximale Bahnbogenlänge von 1 Tag. Deshalb fällt die Wahl auf die kürzeren Bahnbögen mit 15 min und 30 min Länge. Bei maximaler Bogenlänge von 15 min wirkt sich die Aufteilung in kurze Bahnbögen noch nicht nachteilig auf die Potentialkoeffizienten niedrigen Grades aus.

## 5 Ergebnisse

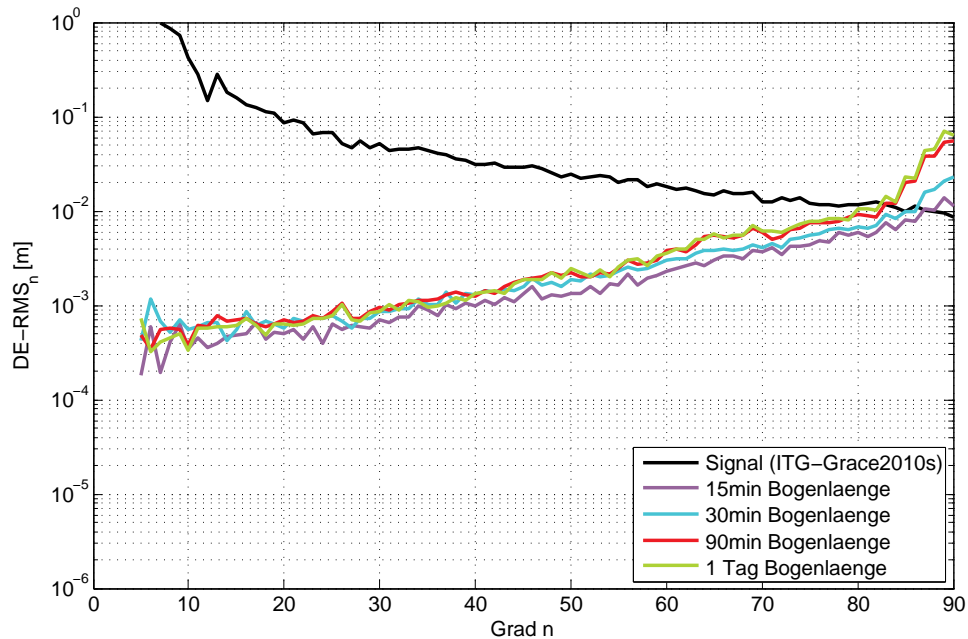


Abbildung 5.10: Ergebnisse der Analyse des kinematischen Orbits (30 Tage) mit unterschiedlicher Bahnbogenlänge (Samplingrate 5 s)

### 5.1.7 empirische Beschleunigungen

Die konstanten empirischen Beschleunigungen, siehe Abschnitt 3.3, stellen die nicht deterministisch modellierbaren Störeinflüsse dar. Sie können optional als unbekannt Parameter angesetzt und in der Analyse mitgeschätzt werden, um die unmodellierten Signalanteile zu absorbieren. Die Schätzung erfolgt pro Bahnbogen, da durch die Lösung der Anfangswertaufgabe Korrelationen entstehen.

Wie im Abschnitt 5.1.6 beschrieben, fällt die Wahl der Bahnbogenlänge auf 15 min oder auf 30 min. Es ist allerdings das Zeitintervall indem die empirischen Beschleunigungen geschätzt werden entscheidend, da die Gefahr besteht, dass auch Signalanteile mit Gravitationsfeldinformation absorbiert werden. Die Gravitationsfeldlösungen werden unter Berücksichtigung der empirischen Beschleunigungen mit den Bahnbogenlängen 15 min und 30 min berechnet. Als Näherungsfeld dient das Modell EGM96, das in der Synthese bis zum Grad  $n = 150$  aufgelöst wird. Die Samplingrate beträgt 5 s.

In der Abbildung 5.11 sind die Lösungen unter Berücksichtigung der empirischen Beschleunigungen dargestellt. Es ist ersichtlich, dass sich mit einer maximalen Bahnbogenlänge von 30 min die Fehler durch die Hinzunahme der empirischen Beschleunigungen im gesamten Spektrum verkleinern. Die Berücksichtigung der empirischen Beschleunigungen bei einer maximalen Bahnbogenlänge von 15 min bewirkt jedoch

## 5 Ergebnisse

nur eine geringe Verbesserung, da sich durch die kürzere Aufteilung der Bahnbögen die nicht modellierbaren Störeinflüsse geringer auswirken. Durch die Hinzunahme der empirischen Beschleunigungen mit einer maximalen Bahnbogenlänge von 15 min wird der Fehler im langwelligen Bereich größer.

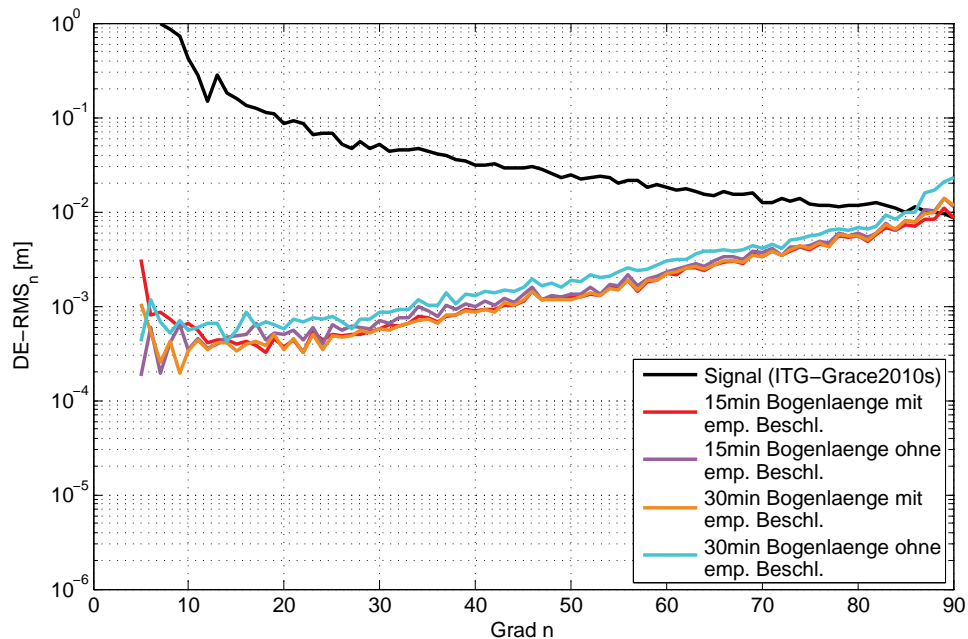


Abbildung 5.11: Ergebnisse der Analyse des kinematischen Orbits (30 Tage) mit und ohne Berücksichtigung der empirischen Beschleunigungen (Samplingrate 5 s)

Somit werden zwei Ansätze weiterverfolgt, einerseits die Verwendung der empirischen Beschleunigungen mit einer maximalen Bahnbogenlänge von 30 min und andererseits die Verwendung der kürzeren Bahnbögen mit einer maximalen Länge von 15 min ohne Einführung der empirischen Beschleunigungen. Diese beiden Lösungsansätze werden verwendet, um das statische Gravitationsfeld der Erde aus dem kinematischen Orbit von GOCE für einen Zeitraum von 61 Tagen zu bestimmen.

## 5.2 GOCE Gravitationsfeldlösungen

Die mit der implementierten Software **ANKOR** berechneten Gravitationsfeldlösungen werden im Folgenden vorgestellt. Ausgehend von dem durch die *Precise Orbit Determination* (POD) innerhalb des GOCE *High-level Processing Facility* bestimmten kinematischen Orbit von GOCE, siehe Bock u. a. [7], wird das statische Gravitationsfeld der Erde bestimmt. Die Samplingrate des kinematischen Orbits beträgt 1 s, innerhalb der Datenvorverarbeitung werden die kinematischen Positionen aber auf eine Samplingrate von  $\Delta t = 5$  s ausgedünnt. Weiter werden grobe Ausreißer aus dem Datensatz eliminiert und die Geschwindigkeit des Satelliten zur Aufstellung der initialen State-Vektoren berechnet. Der kinematische Orbit wird für den Zeitraum vom 01.11.2009 bis 31.12.2009 (61 Tage) analysiert. Diese Periode entspricht dem ersten Wiederholungszyklus der Satellitenmission GOCE.

Die Berechnung der Positionen aus den Näherungswerten der initialen State-Vektoren und dem a priori Erdgravitationsfeldmodell EGM96 wird in der Synthese durchgeführt. Folgende Einflüsse werden in der Synthese berücksichtigt:

- Drittkörperkräfte über die Ephemeriden JPL-DE405 (Standish [29])
- Gezeiten der festen Erde
- Ozeangezeiten über das Modell FES2004 (Lyard u. a. [19])
- Polgezeiten

Die gravitativen Störkräfte sind nach den *IERS Conventions 2010* (Petit und Luzum [25]) modelliert. Die Potentialkoeffizienten werden bis zum Grad  $n = 90$  geschätzt. Da durch die hochfrequenten Anteile des Gravitationsfeldes Aliasing Effekte auftreten, wird in der Synthese das a priori Näherungsfeld bis zum Grad  $n = 150$  aufgelöst.

Die berechneten Positionen aus der Synthese werden dann in der Analyse als Taylorpunkt eines linearisierten Modells verwendet. Es findet kein stochastisches Modell Anwendung. Im Folgenden werden zwei Lösungsansätze verfolgt:

1. Verwendung einer maximalen Bahnbogenlänge von 30 min und Einführung empirischer Beschleunigungen, um die unmodellierten Signalanteile zu absorbieren
2. Verwendung einer maximalen Bahnbogenlänge von 15 min. Dadurch wirken sich die Störeinflüsse geringer aus, weshalb auf die Einführung empirischer Beschleunigungen verzichtet wird.



## 5 Ergebnisse

Die Abbildung 5.12 zeigt die geschätzten Potentialkoeffizienten sowie die berechneten formalen Fehler. Die Potentialkoeffizienten wurden bis Grad  $n = 90$  in der Analyse geschätzt, wobei Aliasing Effekte in den höheren Graden ab  $n \approx 80$  auftreten. Diese Effekte werden durch hochfrequente Fehler des a priori Erdgravitationsfeldmodells EGM96 verursacht. Deshalb wurden die Potentialkoeffizienten auch bis zum Grad  $n = 120$  geschätzt. Wie in Abbildung 5.12 ersichtlich, wird durch die höhere Auflösung die Auswirkung des Aliasing geringer, der langwellige Bereich wird nicht beeinflusst. Das Gravitationsfeld kann mit diesen Lösungen bis zu einem Grad von  $n \approx 95$  aufgelöst werden. Ab diesem Grad sind die Fehler größer als das Signal, es ergibt sich demnach ein Signal-zu-Rausch Verhältnis kleiner eins.

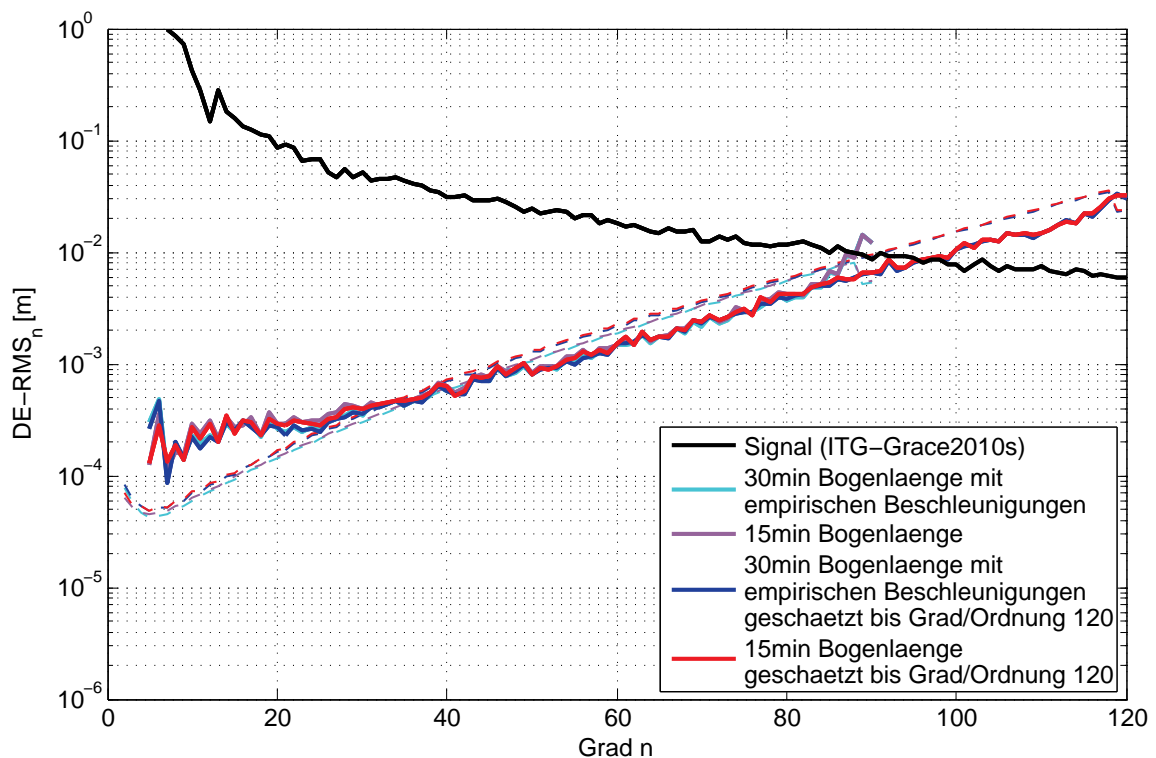


Abbildung 5.12: Gravitationsfeldlösungen aus dem kinematischen Orbit von GOCE für den Zeitraum vom 01.11.2009 bis 31.12.2009 (61 Tage) durchgezogene Linien entsprechen den  $DE-RMS_n$  gestrichelte Linien stellen die entsprechenden formalen Fehler dar

Zur Validierung werden die geschätzten Potentialkoeffizienten, die bis zum Grad  $n = 120$  aufgelöst wurden, mit der externen Gravitationsfeldlösung aus Baur u. a. [5](Abbildung 5, rote Kurve) verglichen. Diese Lösung basiert auf dem Beschleunigungsansatz. Es handelt sich um eine vergleichbare Lösung, da die Beobachtungen auch als unkorreliert und gleich genau angenommen werden. Der Vergleich der  $DE-RMS_n$  in Abbildung 5.13 zeigt eine gute Übereinstimmung im lang- und mit-

## 5 Ergebnisse

telwelligen Bereich bis zum Grad  $n \approx 75$ . Weiter ist die Auswirkung des Polloch-Problems in der externen Gravitationsfeldlösung mit dem Beschleunigungsansatz geringer.

Wie in Mayer-Gürr [20] beschrieben, entsprechen die "wahren" Fehler nicht den berechneten formalen Fehlern, da kein stochastisches Modell verwendet wird. Die "wahren" Fehler werden durch den  $DE-RMS_n$  mit dem GRACE-only Gravitationsfeldmodell ITG-Grace2010s (Mayer-Gürr u. a. [21]) dargestellt.

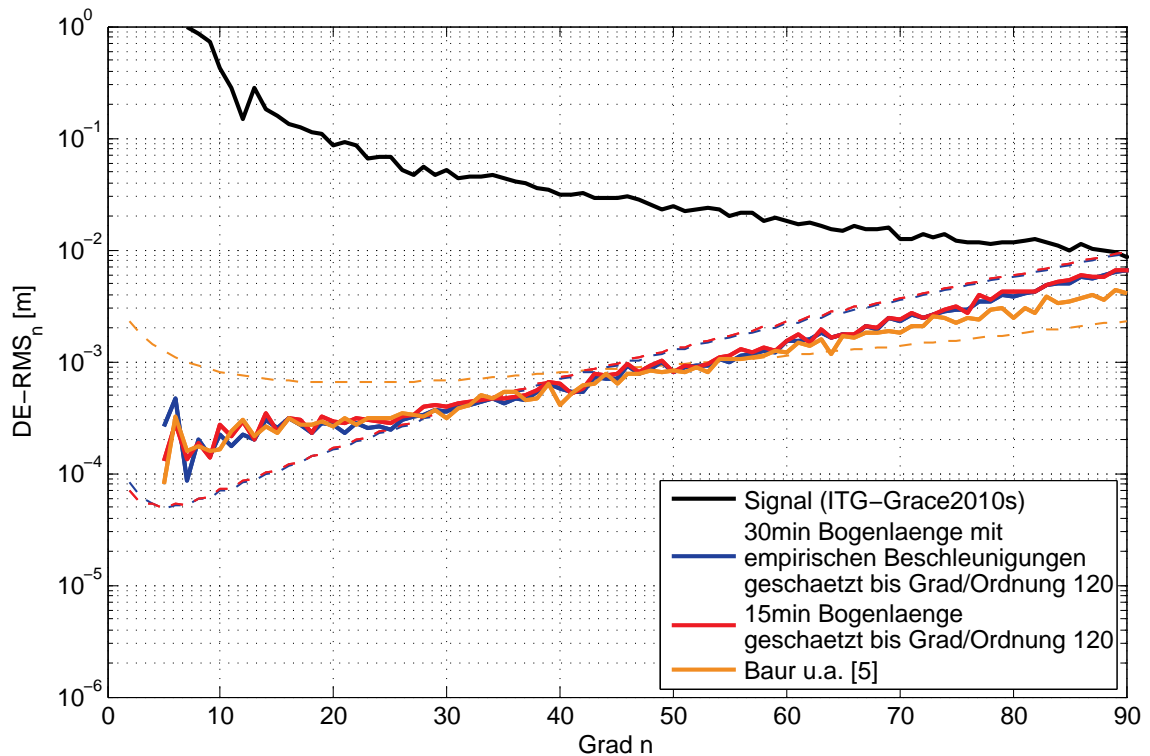


Abbildung 5.13: Gravitationsfeldlösungen aus dem kinematischen Orbit von GOCE für den Zeitraum vom 01.11.2009 bis 31.12.2009 (61 Tage) zum Vergleich mit der externen Gravitationsfeldlösung aus Baur u. a. [5] durchgezogene Linien entsprechen den  $DE-RMS_n$  gestrichelte Linien stellen die entsprechenden formalen Fehler dar

Abschließend lässt sich sagen, dass mit dem hier vorgestellten Ansatz die zu erwartende Qualität der Gravitationsfeldlösungen aus dem kinematischen Orbit von GOCE erreicht werden kann. Die Verwendung eines stochastischen Modells könnte die Gravitationsfeldlösung noch weiter verbessern.

## 6 Zusammenfassung und Ausblick

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Bestimmung des statischen Gravitationsfeldes der Erde mit dem aus GPS bestimmten kinematischen Orbit des Satelliten GOCE. Ausgehend von der Newton-Eulerschen Bewegungsgleichung wird die Position des Satelliten berechnet. Dazu wird die nichtlineare Differentialgleichung 2. Ordnung in Form einer Anfangswertaufgabe für die einzelnen Bahnbögen durch numerische Integration gelöst. Die Näherungswerte der initialen State Vektoren entsprechen den kinematischen Positionen und den aus diesen Positionen numerisch differenzierten Geschwindigkeiten des Satelliten. Da mit den Näherungswerten der Potentialkoeffizienten aus einem a priori Erdgravitationsfeldmodell die Positionen berechnet werden, wird dieser Schritt als Synthese bezeichnet. Die Potentialkoeffizienten des Gravitationsfeldes werden dann in der Analyse bestmöglich geschätzt. Die Beobachtungsgleichung ist nicht linear, daher werden die in der Synthese berechneten Positionen als Taylorpunkt eines linearisierten Modells verwendet und aus den Residuen zu den mit GPS bestimmten kinematischen Positionen werden Zuschläge zu den Näherungswerten der Potentialkoeffizienten geschätzt. Die Linearisierung der Beobachtungsgleichung erfolgt mit den Variationsgleichungen. Demnach handelt es sich um ein differentielles Verfahren, das im Grunde iterativ anzuwenden ist. Es konnte jedoch gezeigt werden, dass durch die Verwendung kurzer Bahnbögen der Linearisierungsfehler bereits nach einer Iteration ausreichend klein ist.

Es werden zwei Ansätze für die Gravitationsfeldbestimmung verfolgt, wobei die Berechnung mit der im Rahmen dieser Arbeit implementierten Software **ANKOR** (**A**nalyse **k**inematischer **O**rbits) erfolgt. Einerseits werden Bahnbögen mit einer maximalen Länge von 30 min verwendet, wobei die nicht deterministisch modellierbaren Störeinflüsse durch die Einführung konstanter empirischer Beschleunigungen absorbiert werden. Andererseits werden kürzere Bahnbögen ( $\approx 15$  min) verwendet. Da sich durch die kürzere Aufteilung der Bahnbögen die unmodellierten Signalanteile geringer auswirken kann auf die Einführung empirischer Beschleunigungen verzichtet werden. Die Validierung mit einer externen Gravitationsfeldlösung aus Baur u. a. [5] zeigt vergleichbare Ergebnisse. In der auf dem Beschleunigungsansatz basierenden externen Lösung werden die Beobachtungen auch als gleich genau und unkorreliert angenommen. Tatsächlich besitzt die radiale Bahnkomponente im Bahnsystem eine geringere Genauigkeit. Aus diesem Grund würde die Verwendung eines stochastischen Modells die Gravitationsfeldlösung verbessern. Weiter würden

## 6 Zusammenfassung und Ausblick

die formalen Fehler durch die Verwendung eines stochastischen Modells realistische Angaben im Vergleich zu den "wahren" Fehlern liefern, siehe Mayer-Gürr [20]. Dabei stellt sich jedoch das Problem, dass das Normalgleichungssystem in dieser Arbeit im Inertialsystem aufgestellt wird. Eine Rotation der Kofaktorenmatrix der Beobachtungen vom Bahnsystem ins Inertialsystem vermischt die genauen mit den ungenauen Koordinaten, somit ist eine Separation der ungenaueren radialen Bahnkomponente nicht mehr möglich. Ein möglicher Lösungsansatz ist die Anpassung einer Autokovarianzfunktion an die Verbesserungen des Parameterausgleichs um eine empirische Kovarianzmatrix der Beobachtungen zu generieren, siehe Baur u. a. [5]. Eine weitere Möglichkeit stellt eine Kovarianzfortpflanzung der Kofaktorenmatrix der Beobachtungen dar.

Die Implementierung erfolgte unter Verwendung der *Automatically Tuned Linear Algebra Software* (ATLAS) mit dem *Linear Algebra PACKage* von Netlib (LAPACK 3.4.1). Die numerische Integration der Variationsgleichungen ist dennoch sehr zeitaufwändig. Eine Gravitationsfeldlösung aufgelöst bis Grad  $n = 90$  berechnet aus dem kinematischen Orbit von GOCE für einem Zeitraum von 61 Tagen dauert in etwa 30 h. Eine Parallelisierung könnte die Prozessierungszeit erheblich verringern.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die Gravitationsfeldlösungen, die mit der Software **ANKOR** bestimmt wurden, im lang- und mittelwelligen Bereich die Qualität erreichen, die aus der Analyse des kinematischen GOCE Orbits zu erwarten ist. Allerdings würde die Berücksichtigung eines stochastischen Modells die Gravitationsfeldlösung noch verbessern.

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Arbeitsablauf der Synthese – Orbitintegration . . . . .	6
2.2	Wirkung der Drittkörperkräfte auf den Satelliten . . . . .	18
2.3	Einfluss der Gezeiten der festen Erde dargestellt in Geoidhöhen am 01.11.2009 0:00 UTC . . . . .	21
2.4	Einfluss der Ozeangezeiten (FES2004 mit S1) dargestellt in Geoidhöhen am 01.11.2009 0:00 UTC . . . . .	23
3.1	Arbeitsablauf der Analyse – Gravitationsfeldbestimmung . . . . .	31
4.1	Residuen der Beschleunigungen innerhalb der Ausreißerdetektion des kinematischen GOCE Orbits (61 Tage) . . . . .	49
5.1	Residuen nach der 1. Iteration mit EGM96 als Näherungsfeld bis Grad 150 mit einer maximalen Bahnbogenlänge von 30 min und einer Samplin- grate von 5 s . . . . .	54
5.2	Residuen nach der 3. Iteration mit EGM96 als Näherungsfeld bis Grad 150 mit einer maximalen Bahnbogenlänge von 30 min und einer Samplin- grate von 5 s . . . . .	54
5.3	Ergebnisse der Analyse des kinematischen Orbits (30 Tage) mit un- terschiedlicher Anzahl der Iterationen der Synthese (max. Bahnbo- genlänge 30 min, Samplingrate 5 s) . . . . .	55
5.4	Residuen nach der 3. Iteration mit GOCO02s als Näherungsfeld bis Grad 150 mit max. Bahnbogenlänge 30 min und Samplingrate 5 s . . . .	56
5.5	Ergebnisse der Analyse des kinematischen Orbits (30 Tage) mit un- terschiedlichen a priori Erdgravitationsfeldmodellen und 3 Iterationen der Synthese (max. Bahnbogenlänge 30 min, Samplingrate 5 s) . . . . .	57
5.6	Ergebnisse der Analyse des kinematischen Orbits (30 Tage) mit un- terschiedlicher Berücksichtigung der hochfrequenten Anteile in der Synthese (max. Bahnbogenlänge 30 min, Samplingrate 5 s) . . . . .	58

## Abbildungsverzeichnis

5.7	Ergebnisse der Analyse des kinematischen Orbits (30 Tage), einerseits alle Ordnungen berücksichtigt und andererseits Ordnungen $m < 5$ vernachlässigt (max. Bahnbogenlänge 30 min, Samplingrate 5 s) . . . . .	59
5.8	Betrag der Differenz der geschätzten Potentialkoeffizienten zum Modell ITG-Grace2010S . . . . .	60
5.9	Ergebnisse der Analyse des kinematischen Orbits (30 Tage) mit unterschiedlicher Samplingrate (max. Bahnbogenlänge 30 min) . . . . .	61
5.10	Ergebnisse der Analyse des kinematischen Orbits (30 Tage) mit unterschiedlicher Bahnbogenlänge (Samplingrate 5 s) . . . . .	62
5.11	Ergebnisse der Analyse des kinematischen Orbits (30 Tage) mit und ohne Berücksichtigung der empirischen Beschleunigungen (Samplingrate 5 s) . . . . .	63
5.12	Gravitationsfeldlösungen aus dem kinematischen Orbit von GOCE für den Zeitraum vom 01.11.2009 bis 31.12.2009 (61 Tage) durchgezogene Linien entsprechen den $DE-RMS_n$ gestrichelte Linien stellen die entsprechenden formalen Fehler dar . .	65
5.13	Gravitationsfeldlösungen aus dem kinematischen Orbit von GOCE für den Zeitraum vom 01.11.2009 bis 31.12.2009 (61 Tage) zum Vergleich mit der externen Gravitationsfeldlösung aus Baur u. a. [5] durchgezogene Linien entsprechen den $DE-RMS_n$ gestrichelte Linien stellen die entsprechenden formalen Fehler dar . .	66

# Literatur

- [1] K. Arsov und R. Pail. »Assessment of two methods for gravity field recovery from GOCE GPS-SST orbit solutions«. In: *Advances in Geosciences* 1 (2003), S. 121–126.
- [2] G. Austen und T. Reubelt. »Räumliche Schwerefeldanalyse aus semi-kontinuierlichen Ephemeriden niedrig- fliegender GPS-vermessener Satelliten vom Typ CHAMP, GRACE und GOCE«. Universität Stuttgart, 2000.
- [3] T. Badura, C. Sakulin, C. Gruber und R. Klostius. »Derivation of the CHAMP-only global gravity field model TUG-CHAMP04 applying the energy integral approach«. In: *Studia Geophysica et Geodaetica* 50 (2006), S. 59–74.
- [4] Oliver Baur, Jianqing Cai und Nico Sneeuw. »Spectral Approaches to Solving the Polar Gap Problem«. In: *System Earth via Geodetic-Geophysical Space Techniques*. Advanced Technologies in Earth Sciences. Springer Berlin Heidelberg, 2010, S. 243–253.
- [5] O. Baur, T. Reubelt, M. Weigelt, M. Roth und N. Sneeuw. »GOCE orbit analysis: Long-wavelength gravity field determination using the acceleration approach«. In: *Advances in Space Research* 50 (2012), S. 385–396.
- [6] G. Beutler, Adrian Jäggi, Leoš Mervart und Ulrich Meyer. »The celestial mechanics approach: theoretical foundations«. In: *Journal of Geodesy* 84 (2010), S. 605–624.
- [7] H. Bock, A. Jäggi, U. Meyer, P. Visser, J. van den IJssel, T. van Helleputte, M. Heinze und U. Hugentobler. »GPS-derived orbits for the GOCE satellite«. In: *Journal of Geodesy* 85 (2011), S. 807–818.
- [8] N. Capitaine, M. Folgueira und J. Souchay. »Earth rotation based on the celestial coordinates of the celestial intermediate pole«. In: *Astronomy & Astrophysics* 445 (2006), S. 347–360.
- [9] D. E. Cartwright und R. J. Tayler. »New Computations of the Tide-generating Potential«. In: *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 23 (1971), 45–73.
- [10] R. Ehrig und U. Nowak. *Algorithmen- und Softwareoptimierung für die Satellitenbahn- und Schwerefeldmodellierung*. Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin (ZIB), 2000.

## Literatur

- [11] H. Goiginger, D. Rieser, Mayer-Gürr T., R. Pail, T. Fecher, T. Gruber, A. Albertella, Maier A., E. Höck, S. Krauss, W. Hausleitner, O. Baur, A. Jäggi, U. Meyer, J.M. Brockmann, W.D. Schuh, I. Krasbutter und Kusche J. *The combined satellite-only global gravity field model GOCCO2S*. 2011. URL: <http://www.goco.eu/>.
- [12] T. Gruber, O. Aprikosov und U. Hugentobler. *GOCE Standards*. Techn. Ber. EGG-C, European GOCE Gravity Consortium, 2010.
- [13] T. Gruber, R. Rummel, O. Aprikosov und R. van Hees. *GOCE Level2 Product Data Handbook*. EGG-C, European GOCE Gravity Consortium, 2009.
- [14] W. Heiskanen und H. Moritz. *Physical Geodesy*. W. H. Freeman und company Ltd. Warner House 48 Upper Thames street E. C. 4 London, 1967.
- [15] K. H. Ilk, J. Flury, R. Rummel, P. Schwintzer, W. Bosch, C. Haas, J. Schröter, D. Stammer, W. Zahel, H. Miller, R. Dietrich, P. Huybrechts, H. Schmeling, D. Wolf, H. J. Götze, J. Riegger, A. Bardossy, A. Güntner und T. Gruber. *Mass transport and mass distribution in the Earth system. Contribution of the new generation of satellite gravity and altimetry missions to geosciences*. Proposal for a German priority research program, 2nd edition. GOCE-Projektbüro TU München, Geoforschungszentrum Potsdam, 2005.
- [16] W.M. Kaula. *Theory of Satellite Geodesy: Applications of Satellites to Geodesy*. Dover Earth Science Series. Dover Publications, 2000. ISBN: 9780486414652.
- [17] F.G. Lemoine, S.C. Kenyon, J.K. Factor, R.G. Trimmer, N.K. Pavlis, D.S. Chinn, C.M. Cox, S.M. Klosko, S.B. Luthcke, M.H. Torrence, Y.M. Wang, R.G. Williamson, E.C. Pavlis, Rapp R.H. und T.R. Olson. *The Development of the Joint NASA GSFC and NIMA Geopotential Model EGM96*. NASA Goddard Space Flight Center, Greenbelt, Maryland, USA, 1998. URL: <http://cddis.nasa.gov/926/egm96/egm96.html>.
- [18] A. Löcher. »Möglichkeiten der Nutzung kinematischer Satellitenbahnen zur Bestimmung des Gravitationsfeldes der Erde«. Universität Bonn, 2010.
- [19] F. Lyard, F. Lefèvre, T. Letellier und O. Francis. »Modelling the global ocean tides: a modern insight from FES2004«. In: *Ocean Dynamics* 56 (2006), S. 394–415.
- [20] T. Mayer-Gürr. »Gravitationsfeldbestimmung aus der Analyse kurzer Bahnbögen am Beispiel der Satellitenmissionen CHAMP und GRACE«. Universität Bonn, 2006.
- [21] T. Mayer-Gürr, E. Kurtenbach und A. Eicker. *The satellite-only gravity field model ITG-GRACE2010s*. 2010. URL: <http://www.igg.uni-bonn.de/apmg/index.php?id=itg-grace2010>.
- [22] D. D. McCarthy und G. Petit. *IERS conventions (2003)*. IERS technical note no. 32. International Earth Rotation und Reference Systems Service (IERS), 2003.



## Literatur

- [23] O. Montenbruck und E. Gill. *Satellite Orbits: Models, Methods, and Applications*. Physics and Astronomy Online Library. Springer, 2000. ISBN: 9783540672807.
- [24] R. Pail, B. Metzler, T. Preimesberger, H. Goiginger, R. Mayrhofer, E. Höck, W. D. Schuh, H. Alkathib, C. Boxhammer, C. Siemes und M. Wermuth. »GOCE-Schwerefeldprozessierung: Software-Architektur und Simulationsergebnisse«. In: *ZfV* (2007), S. 16–25.
- [25] G. Petit und B. Luzum. *IERS conventions (2010)*. IERS technical note no. 36. International Earth Rotation und Reference Systems Service (IERS), 2010.
- [26] G. Petit und B. Luzum. *IERS Message No. 194*. 2011. URL: [http://data.iers.org/products/2/14861/orig/message\\_194.txt](http://data.iers.org/products/2/14861/orig/message_194.txt).
- [27] M. Petrovskaya und A. Vershkov. »Construction of spherical harmonic series for the potential derivatives of arbitrary orders in the geocentric Earth-fixed reference frame«. In: *Journal of Geodesy* 84 (2010), S. 165–178.
- [28] C. Schäfer. »Space Gravity Spectroscopy. The sensitivity analysis of GPS-tracked satellite missions (case study CHAMP)«. Universität Stuttgart, 2001.
- [29] E. M. Standish. *JPL Planetary and Lunar Ephemerides DE405/LE405*. Jet Propulsion Laboratory, Pasadena, 1998.