

## Interpolation mittels Stützpunktgruppen unterschiedlicher statistischer Eigenschaften \*)

VON FRANZ LEBERL, Pasadena, Kalifornien

*Summary:* This paper presents and analyzes a method for the interpolation of a unique surface from two sets of independent digital height data of differing statistical characteristics. This method is based on linear prediction and thus relies on the concepts of auto- and cross-covariance functions.

The linear prediction algorithm for two sets of digital height measurements is first derived and then evaluated using the method of moving averages and bilinear interpolation for comparison. It is found that the overall root mean square interpolation errors of linear prediction are similar to those from moving averages and bilinear interpolation. This accuracy performance, together with the well known potential for controlled filtering of measuring errors and good behavior in areas of poor control, makes linear prediction a versatile and general method for interpolating a unique surface from two sets of digital height data, with applications in photogrammetric mapping, remote sensing, and other fields.

### 1. Einleitung

Es ist für die topographische Kartierung nicht ungewöhnlich, daß Geländehöhen in zwei oder mehr Messungsgruppen verschiedenen Ursprungs, und daher auch unterschiedlicher Genauigkeit, in digitaler Form vorliegen. In der Photogrammetrie tritt dieser Fall zum Beispiel im Überlappungsgebiet zweier Stereomodelle auf, des weiteren beim mäanderförmigen Abfahren des Stereomodelles zum Zweck der digitalen Datenerfassung: Profile, die in entgegengesetzten Richtungen abgefahren werden, ergeben unterschiedliche Messungen. Weitere Beispiele sind im Falle der Verschmelzung photogrammetrischer und tachymetrischer Daten denkbar, oder auch bei der Verbindung von stereoradargrammetrischen Daten und Radarprofilen.

KRAUS (1973) behandelte als erster die Verschmelzung zweier Gruppen photogrammetrischer Messungen mittels linearer Prädiktion. Jedoch formulierte Kraus die Problemstellung so, daß die abgeleitete Rechenmethode theoretisch nur auf Messungsgruppen gleicher statistischer Eigenschaften anwendbar ist. In der hier vorliegenden Arbeit wird eine lineare Prädiktionsmethode abgeleitet, die auch für Messungen unterschiedlicher statistischer Charakteristik gültig ist.

In der Begriffswelt der Statistik werden die zwei Messungsgruppen als Realisierungen von Zufallsfunktionen verstanden. Im allgemeinen Interpolationsfall kann diese Zufallsfunktion  $n$ -dimensional und in einem  $m$ -dimensionalen Raum definiert sein. Im Falle der Interpolation im digitalen Höhenmodell ist die Zufallsfunktion eindimensional (Geländehöhe), und in einem zweidimensionalen Referenzraum definiert (LEBERL 1975). Der letztere Fall wird in dieser Arbeit behandelt.

Zunächst wird ein Prädiktionsalgorithmus für den Fall von mehr als einer Messungsgruppe abgeleitet. Dieser Algorithmus wird dann mit zwei anderen Interpolationsmethoden verglichen. Es wird gezeigt, daß die mittleren Interpolationsfehler der linearen Prädiktion nur geringfügig kleiner sind als die Fehler, welche mittels der Methode der gleitenden Mittelwerte und der bilinearen Interpolation erhalten werden.

\*) Vorgetragen beim Jahrestreffen der American Society of Photogrammetry, Februar 1976, Washington, D.C.

## 2. Statistisches Modell einer Geländeoberfläche und ihrer Messungen

Eine Geländeoberfläche  $z = z(x, y)$  kann als Summe eines Trends  $t(x, y)$ , eines Signals  $s(x, y)$  und einer Komponente  $r(x, y)$  dargestellt werden:

$$z(x, y) = t(x, y) + s(x, y) + r(x, y). \quad (1)$$

Abb. 1 illustriert die Begriffe des Trends, Signals und der  $r$ -Komponente für ein Beispiel in einer Dimension. Der Trend  $t$  wird nicht als Zufallsgröße, sondern als deterministische Größe verstanden. Das Signal  $s$  ist eine Zufallsfunktion, deren statistische Eigenschaften durch eine Autokovarianzfunktion  $C_s(d)$  beschrieben werden, wobei  $d$  eine Distanz darstellt.

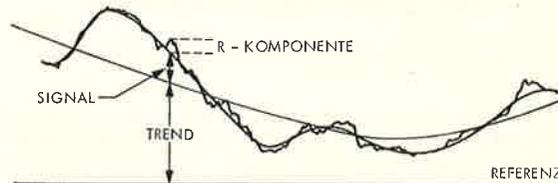


Abb. 1. Zerlegung der Geländehöhen in einen Trend, ein Signal und eine Zufallskomponente mit sehr geringer Korrelationslänge ( $r$ -Komponente).

Die Kovarianzfunktion der  $r$ -Komponente ist  $C_r(d)$ . Es gilt

$$\lim_{d \rightarrow \infty} C_s(d) = 0; \quad C_r(d) \rightarrow 0, \quad d > 0; \quad C_r(d) \geq 0, \quad d = 0.$$

Das vorliegende Modell des Geländes enthält zwei verschiedene Zufallsfunktionen  $s(x, y)$  und  $r(x, y)$ . Diese beiden Komponenten unterscheiden sich durch ihre Autokovarianzfunktionen. Man ist versucht, die  $r$ -Komponente als „Störfunktion“ oder „Noise“ zu bezeichnen, da ihre Autokovarianz mit wachsendem  $d$  sehr schnell verschwindet. Theoretisch ist die Bezeichnung „Störfunktion“ nicht gerechtfertigt, da sie nur auf Beobachtungsfehler zutrifft. Wegen der sehr kurzen Korrelationslängen kann es aber wohl sinnvoll sein, in der Arbeit mit digitalen Höhenmessungen zu setzen:

$$C_r(d) = 0 \quad \text{für } d \neq 0.$$

Somit ermöglicht die  $r$ -Komponente es, das Auftreten einer scheinbar unkorrelierten Komponente selbst im Falle „fehlerfreier“ Messungen zu erklären.

Eine diskrete Höhenmessung  $z'_i = z'(x_i, y_i)$  hat einen unvermeidlichen Fehler. Wird die Messung photogrammetrisch gewonnen, so ist sie indirekt, nämlich durch ein stereoskopisches Modell. Gerade im Falle indirekter Messungen kann der Meßfehler selber im allgemeinen aus Trend, Signal und Störfunktion (Noise) bestehen:

$$\begin{aligned} z'_i &= z_i + t'_i + s'_i + r'_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ &= t_i + s_i + r_i + t'_i + s'_i + r'_i. \end{aligned} \quad (2a)$$

Für eine zweite Messungsgruppe gilt:

$$z''_j = z_j + t''_j + s''_j + r''_j, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (2b)$$

Die statistischen Eigenschaften von  $s'_i, r'_i, s''_j, r''_j$  werden wiederum durch Kovarianzfunktionen  $C_{s'}, C_{s''}, C_{r'}, C_{r''}$  beschrieben. (Der Einfachheit halber wird im folgenden das Argument  $d$  der Kovarianzfunktion nicht explizit angeführt [ $C_{s'} = C_{s'}(d)$ ].)

Die lineare Prädiktion wird hier nur auf Zufallsfunktionen angewendet, nicht aber auf die deterministischen Komponenten  $t, t', t''$ . Eliminiert man also den Trend aus den Messungen, so bleibt:

$$e'_i = s_i + s'_i + r_i + r'_i, \quad (3a)$$

$$e''_j = s_j + s''_j + r_j + r''_j. \quad (3b)$$

Die Kovarianzen von  $e', e''$  sind  $C_{e'}, C_{e''}$ . Die lineare Prädiktion sollte nun das Signal  $s$  auf Grund von  $e', e''$  Werten schätzen. Hierzu sind die Zusammenhänge unter den Kovarianzfunktionen zu formulieren. Es wird dabei davon ausgegangen, daß das Signal  $s$  weder mit  $s'$  oder  $s''$ , noch mit  $r, r', r''$  korreliert ist.

Somit erhält man aus (3a) und (3b):

$$C_{e'} = C_s + C_{s'} + C_{r'} + C_r, \quad (4a)$$

$$C_{e''} = C_s + C_{s''} + C_{r''} + C_r, \quad (4b)$$

$$C_{e'e''} = C_s + C_{s's''} + C_r. \quad (4c)$$

$C_{e'e''}$  ist die Kreuz-Kovarianzfunktion der Zufallskomponente der Messungen, und  $C_{s's''}$  ist die Kreuz-Kovarianzfunktion der Signale der Meßfehler.  $C_{e'}, C_{e''}$  und  $C_{e'e''}$  können sehr einfach direkt aus den Messungen errechnet werden;  $C_{s'}, C_{s''}, C_{s's''}$  und  $C_s$  sind unbekannt.

Die bisherige Diskussion behandelte den Fall zweier Messungsgruppen. Wenn eine dritte Gruppe vorhanden ist, so gilt:

$$C_{e'''} = C_s + C_{s'''} + C_{r'''} + C_r,$$

$$C_{e'e'''} = C_s + C_{s's'''} + C_r,$$

$$C_{e''e'''} = C_s + C_{s''s'''} + C_r.$$

Die Verallgemeinerung auf mehr als drei Messungsgruppen ist offensichtlich. Somit erhält man also eine Anzahl von Zwangsbedingungen, welche für den Zusammenhang unter den Kovarianzfunktionen formuliert werden können. Die Varianzen für die lineare Prädiktion müssen diese Zwangsbedingungen erfüllen.

### 3. Lineare Prädiktion mit mehr als einer Messungsgruppe

#### 3.1. Rechenvorschrift

Die lineare Prädiktion beruht auf den Komponenten  $e'_i, e''_i, \dots$  der Messungen (Gl. 3). Man erhält eine Schätzung  $\bar{r}_i + \bar{s}_i$  des Signals  $r + s$  auf Grund von (YAGLOM 1962):

$$\bar{r}_i + \bar{s}_i = \mathbf{q} \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{e}^T, \quad (5)$$

wobei

$$\mathbf{e} = (e', e'', \dots) = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n; e''_1, e''_2, \dots, e''_m; \dots).$$

Der Vektor  $\mathbf{e}$  enthält die Messungen nach der Trendeliminierung. Die Matrix  $\mathbf{Q}$  enthält die Kovarianzen des Vektors  $\mathbf{e}$  und daher spezifische Werte der Funktionen  $C_{e'}, C_{e''}, C_{e'e''}, \dots$ . Der Vektor  $\mathbf{q}$  besteht aus Kreuz-Kovarianzen  $C_{(s+r),e'}, C_{(s+r),e''}, \dots$  zwischen dem Signal  $(s+r)_i$  und den Vektoren  $e', e'', \dots$ .

#### 3.2. Kovarianzfunktionen

Die Kovarianzfunktionen  $C_{e'}, C_{e''}, C_{e'e''}, \dots$  können sehr einfach aus den  $e', e''$ -Komponenten der Messungen berechnet werden (z.B. KRAUS 1973). Man erhält empirische Kovarianzwerte für eine Reihe von Distanzklassen  $\bar{d}_i - \Delta d \leq d < \bar{d}_i + \Delta d$ . Durch diese empirischen Werte berechnet man dann eine positiv definite Funktion mit zwei Variablen. Eine solche Funktion ist zum Beispiel

$$C(d) = \frac{C_0}{1 + d^2/C_1^2}, \quad d \neq 0; \quad C(0) = V, \quad d = 0. \quad (6)$$

Die Diskontinuität von  $C(d)$  an der Stelle  $d=0$  ist ein Maß für  $(C_{r'} + C_r), (C_{r''} + C_r)$ , wobei man davon ausgeht, daß  $C_r$  für  $d \neq 0$  verschwindet.

$C_{(s+r),e'}, C_{(s+r),e''}, \dots$  können nicht direkt berechnet werden. Da jedoch angenommen wird, daß  $s$  weder mit  $s', s'', \dots$ , noch mit  $r', r'', \dots$  oder mit  $r$  kreuz-korreliert ist, gilt:

$$C_{(s+r),e'} = C_{(s+r),e''} = C_{se'} + C_r = C_{se''} + C_r = C_s + C_r. \quad (7)$$

Gl. (4a) und (4b) ermöglichen also die Formulierung eines expliziten Ausdrucks für  $C_s$ :

$$C_s + C_r = \frac{(C_{e'} - C_{r'}) \cdot C_{s''} - (C_{e''} - C_{r''}) \cdot C_{s'}}{C_{s''} - C_{s'}}. \quad (8)$$

Im Falle von mehr als nur zwei Messungsgruppen kann Gl. (8) für jedes Paar der Messungen formuliert werden. Aus Gl. (8) ist ersichtlich, daß das Verhältnis  $C_{s'}/C_{s''}$  der Kovarianzfunktionen  $C_{s'}$ ,  $C_{s''}$  zur Berechnung von  $C_s$  benötigt ist.

Falls es nicht möglich ist, die Kovarianzen der Meßfehler in einer Kalibrierung des Meßvorganges zu bestimmen, so muß eine Annahme für das Verhältnis getroffen werden, zum Beispiel Proportionalität von  $C_{s'}$  und  $C_{s''}$ :

$$C_{s'} = a \cdot C_{s''}. \quad (9)$$

Für jeden Proportionalitätsfaktor  $a \neq 1$  ergibt sich aus Gl. (8) eine Kovarianzfunktion  $C_s$ . Wenn  $a = 1$ , so läßt sich  $C_s$  nicht aus Gl. (8) bestimmen. In dem Fall kann man auf Gl. (4c) zurückgreifen. Mit zusätzlichen Annahmen über  $C_r$  und  $C_{s's''}$ , z. B.:

$$C_{s's''} = b \cdot C_{s'} = c \cdot C_{s''}, \quad (10)$$

ergibt sich eine Lösung für  $C_s$ .

### 3.3. Diskussion der Kovarianzbeziehungen

Gl. (9) und (10) stellen eine willkürliche Wahl aus der unendlichen Anzahl möglicher Beziehungen zwischen den Kovarianzen  $C_{s'}$ ,  $C_{s''}$ ,  $C_{s's''}$  dar. Die statistische Bedeutung der Parameter  $a$ ,  $b$  und  $c$  in Gl. (9) und (10) läßt sich erläutern, wenn man den Fall zweier Messungsgruppen betrachtet, die dieselben Korrelationslängen, aber verschiedene Genauigkeiten haben. Die Messungen sollten daher verschiedene Gewichte erhalten:

$$C_{s'} = p^2 \cdot C_{s''}. \quad (11)$$

Interpoliert man nun zwei Flächen, jede unter Verwendung von nur einer Messungsgruppe, und nimmt man dann das gewogene Mittel der beiden Flächen, so impliziert man:

$$s' = -p \cdot s''. \quad (12)$$

Es ist offensichtlich, daß Gl. (12) die Gültigkeit von Gl. (11) nach sich zieht und daß weiter gilt:

$$C_{s's''} = -p \cdot C_{s''} = -\frac{1}{p} \cdot C_{s'}. \quad (13)$$

Es zeigt sich also, daß man für Messungen verschiedener Genauigkeit, aber gleicher Korrelationslängen erhält:

$$a = p^2; \quad b = -p; \quad c = -\frac{1}{p}.$$

Sind die Korrelationslängen verschieden, so sind die Parameter  $p$ , und somit  $a$ ,  $b$  und  $c$ , nicht mehr konstant, sondern abhängig von der Distanz  $d$ . Überdies verliert Gl. (13) ihre Gültigkeit.

Für gleiche Korrelationslängen kann der Parameter  $p$  aus Gl. (4), (11) und (13) berechnet werden. Man erhält:

$$p = \frac{C_{e'} - C_{e'e''} - C_{r'} - C_r}{C_{e'e''} - C_{e''} + C_{r''} + C_r}. \quad (14)$$

Abb. 2 zeigt ein Beispiel von Kovarianzfunktionen  $C_{e'}$ ,  $C_{e''}$ ,  $C_{e'e''}$ , die zu numerischen Experimenten in Abschnitt 5 gehören. Aus diesen Funktionen erhält man einen  $p$ -Wert von 2,7.

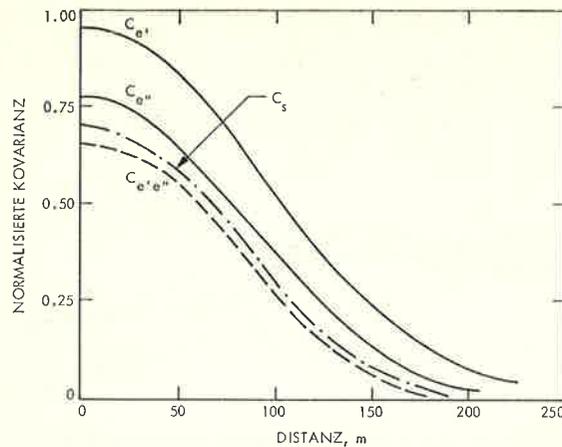


Abb. 2. Kovarianzfunktionen  $C_{e'}$ ,  $C_{e''}$ ,  $C_{e'e''}$  und  $C_s$ , berechnet aus zwei Gruppen von simulierten Höhenmessungen.

Für ungleiche Korrelationslängen muß direkt eine Funktion  $a(d)$  vorgegeben werden (Gl. 9). Daraus erhält man  $C_s(d)$  unter Verwendung von Gl. (8).

KRAUS (1973) behandelte den Spezialfall der linearen Prädiktion mittels zweier Messungsgruppen gleicher Korrelationslängen und gleicher Genauigkeit. Er erhält also  $p=1$  und daher  $a=1$ ,  $b=c=-1$ . Gl. (8) läßt sich somit nicht lösen. Aus Gl. (4) ergibt sich jedoch:

$$C_s = \frac{C_{e'e''} + C_{e'} - C_r - 2C_r}{2} \quad (15)$$

### 3.4. Trend und Trendberechnung

Die lineare Prädiktion beruht auf der theoretischen Annahme, daß die Meßdaten statistisch stationär und homogen sind (stationär: Mittelwert ist derselbe in verschiedenen Bereichen der Zufallsfunktion; homogen: Kovarianzfunktion ist konstant). Geländehöhen sind wohl meist weder stationär noch homogen. Der Begriff des Trends ist hier daher sehr nützlich: unterteilt man nämlich ein ursprünglich großes digitales Höhenmodell und berechnet für jedes Teilgebiet einen Trend, so kann man hoffen, daß man nach Eliminierung des Trends stationäre und homogene Residuen erhält; lineare Prädiktion kann auf diese Residuen angewendet werden.

Dieser Vorgang ist einfach, wenn die Meßfehler keinen Trend enthalten. In dem Falle kann die Trendberechnung sogar gleichzeitig mit der Prädiktion ausgeführt werden („least squares collocation“, MORITZ 1973). Es ergibt sich überdies, daß die lineare Prädiktion in Anwendungen zur Höheninterpolation nicht sehr empfindlich für die tatsächliche Einhaltung der Stationarität und Homogenität ist: der Trend besteht nur aus der Berechnung eines sehr überbestimmten Polynoms niedriger, also 1., 2. und 3., Ordnung.

Wenn die Trendberechnung jedoch die Meßfehler betrifft, so ist der Zweck ein ganz anderer: trendbehaftete Meßfehler bedeuten eine niedrige absolute Genauigkeit der Messungen. Trendeliminierung bedeutet hier also die Verbesserung der absoluten Genauigkeit vor der Prädiktion. Im Falle einer einzigen Messungsgruppe kann der Trend in den Meßfehlern nicht bestimmt werden. Liegen jedoch zwei Gruppen von Messungen vor, so hat man unter Umständen die Möglichkeit zur Verbesserung der absoluten Meßgenauigkeit.

In Gl. (2) wurde davon ausgegangen, daß die Höhenmessungen  $z'$ ,  $z''$  im allgemeinen drei Trends enthalten können:  $t$ ,  $t'$ ,  $t''$ . Trendeliminierung sollte nun mit der Berechnung von drei Polynomen beginnen:  $\text{pol}(x, y)$  aus  $z'$  und  $z''$ ;  $\text{pol}'(x, y)$  aus  $z'$ ;  $\text{pol}''(x, y)$  aus  $z''$ .

Sind die Meßfehler von  $z'$  trendfrei, so kann man erwarten, daß (Abb. 3):

$$\begin{aligned} t(x, y) &= \text{pol}'(x, y), \\ t'(x, y) &= 0, \\ t''(x, y) &= \text{pol}''(x, y) - \text{pol}'(x, y). \end{aligned}$$

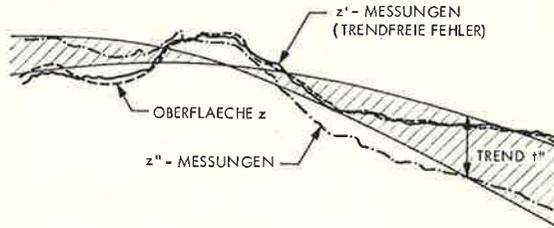


Abb. 3. Berechnung eines Trends in den Meßfehlern. Falls  $z'$  keine Trendkomponente hat, so stellt das schraffierte Gebiet den Trend von  $z''$  dar.

#### 4. Andere Methoden zur Verschmelzung zweier Gruppen von Höhenmessungen

Die lineare Prädiktion ist nur eine von vielen Methoden zur Interpolation mittels zweier Messungsgruppen. Die bilineare Polynominterpolation und die Methode der gleitenden Mittelwerte werden daher verwendet, um die Leistungsfähigkeit der linearen Prädiktion zu beurteilen.

Für die bilineare Polynominterpolation werden die vier nächsten Stützpunkte für jede Berechnung ausgewählt. Die Höhe im Neupunkt wird unabhängig für jede Messungsgruppe mittels eines bilinearen Polynoms interpoliert, so daß zwei Werte  $\bar{z}'$ ,  $\bar{z}''$  erhalten werden. Aus diesen beiden Werten berechnet man das gewogene Mittel  $\bar{z}$ .

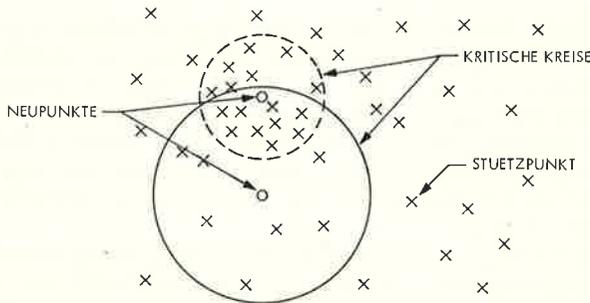


Abb. 4. Interpolation mittels gleitender Mittelwerte unter Verwendung der  $n$  nächsten Punkte ( $n = 16$ ).

Für eine Interpolation mittels gleitender Mittelwerte werden per Neupunkt die Messungen ausgewählt, die dem Neupunkt am nächsten liegen (Abb. 4). Ein Polynom des Grades  $m$  ( $m = 1, 2$  oder  $3$ ) wird durch die  $n$  Stützpunkte gelegt, wobei jedem Referenzpunkt ein Gewicht in Funktion des Abstandes vom Neupunkt gegeben wird. Eine typische Gewichtsannahme ist:

$$w(d) = \frac{C_0}{1 + d^k}, \tag{16}$$

wobei für  $C_0$ ,  $k$  eine subjektive Wahl getroffen werden muß.

5. Numerischer Methodenvergleich mittels simulierter Daten

5.1. Höhenmessungen

Eine sehr einfache Methode zur Computersimulation von Höhenmessungen wurde für den Zweck dieser Untersuchung programmiert. Dabei wird davon ausgegangen, daß im wesentlichen eine Unterscheidung von Trend, Signal und Störfunktion nur eine Frage des Maßstabs ist: was in einem gewissen Maßstab als Trend erscheint, kann in einem kleineren Maßstab als Signal interpretiert werden; und eine weitere Maßstabsverkleinerung kann es gar als Störfunktion erscheinen lassen. Trend, Signal und Noise können daher durch denselben Algorithmus erzeugt werden. Zu diesem Zweck werden also erst in den Schnittpunkten eines Gitters normalverteilte Höhen generiert. Daraufhin werden in jedem Gitter-

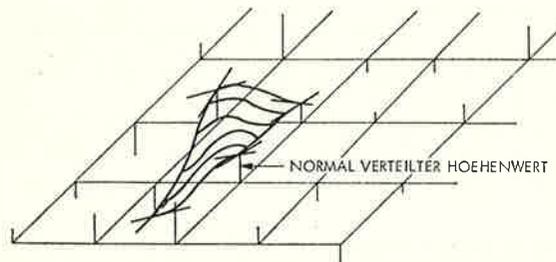


Abb. 5. Generierung einer Zufallsfunktion.

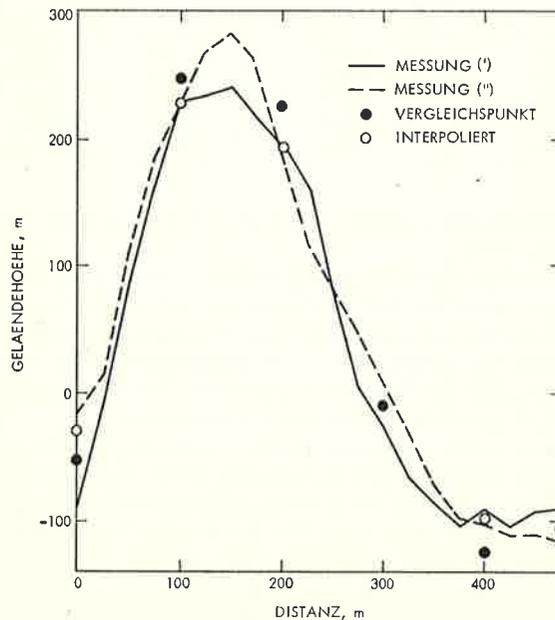


Abb. 6. Profile durch zwei simulierte Flächen.

punkt Tangenten in der Richtung der Gitterlinien berechnet, indem man benachbarte Höhenwerte heranzieht (Abb. 5). Somit erhält man in jeder Gittermasche vier Höhen- und acht Tangentenwerte. Diese 12 Werte definieren ein Polynom mit 12 Koeffizienten. Hierzu wurde eine Methode von JANCAITIS und JUNKINS (1973) verwendet.

Für das Interpolationsexperiment wurden zwei Gitter von  $10 \times 10$  Punkten generiert. Der Mittelpunkt jeder Gittermasche dient als Vergleichspunkt. Abb. 6 zeigt Profile zur Illustration der simulierten Messungen.

### 5.2. Ergebnisse

Die Tabellen 1 und 2 enthalten die mittleren Interpolationsfehler, die aus 81 Vergleichspunkten berechnet werden. Jedoch werden die Fehler nicht direkt, sondern nur in der Form von Verhältniszahlen gegeben. Diese Verhältniszahlen erhält man, wenn der mittlere Inter-

Tabelle 1. Ergebnis der Interpolation mittels gleitender Mittelwerte. Die Werte sind mittlere Interpolationsfehler in Vergleichspunkten, geteilt durch den mittleren Fehler aus der bilinearen Interpolation.

	Methode der gleitenden Mittelwerte					
	Gruppe 1	Gruppe 2	Gruppe 1	Gruppe 2	Gruppe 1	Gruppe 2
Gewichte	$\frac{1}{1+d^4}$	$\frac{1}{1+d^4}$	$\frac{0,8}{1+d^4}$	$\frac{1}{1+d^4}$	$\frac{1}{1+d^4}$	$\frac{0,8}{1+d^4}$
Resultate	0,90		0,88		0,92	

Tabelle 2. Ergebnis der Interpolation mittels linearer Prädiktion. Die Werte sind mittlere Interpolationsfehler in Vergleichspunkten, geteilt durch den mittleren Fehler aus der bilinearen Interpolation. Alle Korrelationslängen sind gleich ( $C_1 = 100$  m).

Zeile	Methode der linearen Prädiktion				
	$C_{e'} - C_{r'} - C_r$	$C_{e''} - C_{r''} - C_r$	$C_{e'e''}$	$C_s$	Resultate
1	0,950	0,800	0,700	0,750	0,85
2	0,950	0,900	0,800	0,850	0,86
3	0,800	0,950	0,700	0,750	0,84
4	0,900	0,900	0,700	0,800	0,92
5	0,900	0,900	0,900	0,900	1,24

polationsfehler eines bestimmten Falles durch den Fehler geteilt wird, der sich aus der bilinearen Interpolation ergibt.

Eine offenkundige Schlußfolgerung aus Tabellen 1 und 2 ist, daß sich die mittleren Interpolationsfehler nur um etwa 15% voneinander unterscheiden. Dies bestätigt andere experimentelle Genauigkeitsuntersuchungen von Interpolationsmethoden (LEBERL 1973). Es ist wohlbekannt, daß der entscheidende Genauigkeitsverlust in der digitalen Geländebeschreibung darin liegt, daß das Gelände in diskreten Punkten gemessen wird. Die Interpolation kann diesen Informationsverlust nicht wettmachen.

Die lineare Prädiktion wurde mit einer Reihe verschiedener Kovarianzfunktionen vom Typ der Gl. (6) verwendet. Es stellte sich heraus, daß die Methode auch in dieser Anwendung nicht sehr empfindlich für die Wahl der Kovarianzfunktion ist. Ähnliches gilt auch für die Methode der gleitenden Mittelwerte: auch hier ist die Wahl von Gewichten nicht kritisch.

In jeder Anwendung der linearen Prädiktion kann die Konditionierung der Matrix  $Q$  der Gl. (5) zu Problemen führen. Diese Matrix ist fast singular, wenn eine große Anzahl von Stützpunkten verwendet wird. Jedoch ist Singularität nicht nur abhängig von der Anzahl der Stützpunkte, sondern auch vom Typ der Kovarianzfunktion, wie in Zeile 5 der Tabelle 2 angedeutet wird.

### 6. Schlußfolgerungen

Die Methode der Interpolation und Filterung nach der Methode der kleinsten Quadrate (lineare Prädiktion) wird in der vorliegenden Arbeit auf das Problem der Höheninterpolations-

tion mittels zweier Messungsgruppen erweitert. KRAUS (1973) behandelte als erster das photogrammetrische Problem der Verschmelzung zweier Gruppen von Höhenmessungen. Jedoch beschränkte sich KRAUS auf den Spezialfall von Messungen gleicher statistischer Eigenschaften. Im vorliegenden Fall werden Messungen verschiedener statistischer Charakteristik behandelt. Das statistische Modell berücksichtigt korrelierte und (nahezu) unkorrelierte Komponenten in den Meßfehlern wie auch in den Geländehöhen. Eine Methode zur Berechnung jener Kovarianzen wird beschrieben, die für die lineare Prädiktion benötigt werden.

Eine numerische Analyse der linearen Prädiktion mittels simulierter Höhendaten führt zur Schlußfolgerung, daß die Interpolationsfehler wohl etwas, aber nicht wesentlich kleiner sind als jene, die durch die Methode der gleitenden Mittelwerte oder die bilineare Interpolation erhalten werden. Es wurde bestätigt, daß die Prädiktionsmethode auch in der vorliegenden Variante nicht sehr empfindlich für die Wahl der Kovarianzfunktionen ist.

Es erscheint also zusammenfassend, daß die Interpolation und Filterung nach der Methode der kleinsten Quadrate auch in der Anwendung auf zwei Messungsgruppen verschiedener Genauigkeit zu Ergebnissen führt, die vergleichbar sind mit jenen aus anderen Algorithmen. Die zusätzlichen Vorteile der kontrollierten Filterung von Meßfehlern und ein sehr günstiges Verhalten in Gebieten mit wenig Stützpunkten führen daher zu dem Schluß, daß für eine Anwendung der Methode auf Probleme mit zwei Messungsgruppen dieselbe Rechtfertigung gilt, die auch für den Standardfall gehandhabt wird.

*Dank:* Für eine kritische Diskussion über das Manuskript möchte ich Herrn Prof. Dr. R. Rapp und Herrn Dr. R. Rummel von der Ohio State University in Columbus, Ohio, und Herrn Prof. Dr. K. Kraus, Wien, herzlich danken.

#### Literatur

- JANCAITIS, J. und J. JUNKINS: Modeling Irregular Surfaces. Photogrammetric Engineering, XXXIX (1973), No. 4.,
- KRAUS, K. und E. M. MIKHAIL: Linear Least Squares Interpolation. Photogrammetric Engineering, XXXVIII, (1972), No. 10.
- KRAUS, K.: Prädiktion und Filterung mit zwei verschiedenen Stützpunkt-Gruppen. ZfV 98 (1973), 146—153.
- LEBERL, F.: Interpolation in Square Grid DTM. ITC-Journal, 1973-5, 756—807, Enschede, NL.
- LEBERL, F.: Photogrammetric Interpolation. Photogrammetric Engineering and Remote Sensing, XLI (1975), No. 5.
- MORITZ, H.: Least Squares Collocation. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe A, No. 75, München 1973.
- YAGLOM, A.: An Introduction to the Theory of Stationary Random Functions. Prentice Hall, New Jersey 1962.