Modellierung partiell-resistenter Verbindungen unter Berücksichtigung isotroper und kinematischer Verfestigung

eingereicht am

Institut für Baustatik
der
Technischen Universität Graz
im
Jänner 2007

Verfasserin: Katharina Riederer

Kontakt: Katharina Riederer
Katzianergasse 11
A-8010 Graz
rk@sbox.tugraz.at

Danksagung

Für die interessante Aufgabenstellung und die wertvolle Betreuung möchte ich mich vor allem bei Dr.-Ing. Ulrike Eberwien und Dipl.-Ing. Gudrun Stettner bedanken.

O.Univ.-Prof. Gernot Beer und dem ganzen Institut für Baustatik danke ich für die freundliche Unterstützung und Hilfsbereitschaft.

Außerdem danke ich meinen Eltern und Tobias Madl, die mich in allen Belangen großzügig unterstützt haben.

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird das elasto-plastische Verhalten ebener Rahmentragwerke unter zyklischer Beanspruchung (z.B. durch Erdbeben) simuliert. Es wird davon ausgegangen, dass plastisches Verhalten nur in dafür vorgesehenen „partiell-resistenten Verbindungen“ auftritt. Diese Verbindungen werden hier vereinfacht durch Drehfedern simuliert. Für ein diese Drehfedern werden konstitutive Beziehungen aufgestellt, welche elasto-plastisches Verhalten in geeigneter Weise nachstellen können.

Dafür werden zunächst die konstitutiven Beziehungen eines allgemeinen drei-dimensionalen Kontinuums hergeleitet. Das plastische Verhalten wird durch unterschiedliche Arten der Verfestigung berücksichtigt: isotrope-, kinematische- und gemischte- Verfestigung. Wobei jeweils lineare und nichtlineare Verfestigungsgesetze eingeführt werden.

Ausgehend von den allgemeinen Spannungs- Dehnungs- Beziehungen wird das Problem für ebene Stabtragwerke in Kraft- und Weggrößen abhängige Gleichungen übergeführt und im Speziellen, für den Fall der Drehfeder, in ein eindimensionales Gleichungssystem reduziert. Diese reduzierten konstitutiven Beziehungen werden in das Finite Elemente Programm ANSYS implementiert, so dass beliebige ebene Rahmentragwerke mit mehreren partiell-resistenten Verbindungen simuliert werden können.

Zuletzt werden anhand von zwei ausgewählten Versuchen Parameter für die Federelemente ermittelt, welche dann zur Simulation von Rahmentragwerken herangezogen werden.

Abstract

The aim of this work is to simulate the elasto-plastic behaviour of plane frame structures under cyclic loading (for example by earthquake), assuming that plastic behaviour only occurs in certain areas, in so called „partially restrained connections“.

These partially restrained connections are simulated approximately by springs. Constitutive relations for this spring elements must be found to model the elasto-plastic response in an appropriate way.

Firstly, the constitutive relation is derived for a general three dimensional continuum. The behaviour in the plastic domain is considered by different kinds of hardenings: isotropic-, kinematic- and mixed-hardening. In every hardening type a linear and a nonlinear hardening law will be used.

For plane frame structures the general stress- and strain- relation can be transferred into a generalised form (force- displacement- relation). For the spring it can be reduced into a one dimensional system of equations.

The reduced constitutive relations are implemented in the finite element program ANSYS. This allows simulation of any plane frame structures with several partially restrained connections.

Finally, it is necessary to find appropriate parameters for the constitutive relations of the springs. On the basis of two different tests of beam to column connections the parameters will be identified. These parameters will be used to simulate frame structures with partially restrained connections.

Ich versichere:

dass ich diese Diplomarbeit selbständig verfasst, nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt und mich auch sonst nur erlaubten Hilfen bedient habe.

dass ich dieses Diplomarbeitsthema bisher weder im In- noch im Ausland in irgendeiner Form als Prüfungsarbeit vorgelegt habe.

dass diese Arbeit mit der vom Begutachter beurteilten Arbeit übereinstimmt.

Datum	Unterschrift
19. Jänner 2007	____________________

Inhaltsverzeichnis

Formelzeichen

$\boldsymbol{\sigma}$, σ_{ij}	Spannungstensor
$\boldsymbol{\epsilon}$, ϵ_{ij}	Verzerrungstensor
$\sigma_{1\,2\,3}$	Hauptspannungen
$\sigma^{'}_{1\,2\,3}$	deviatorische Anteile der Hauptspannungen
$I_{1\,2\,3}$	Spannungsinvarianten
$J_{1\,2\,3}$	Invarianten des Deviators
$d\boldsymbol{\sigma}$	Spannungsinkrement
$d\boldsymbol{\epsilon}$	Verzerrungsinkrement
$d\boldsymbol{\epsilon}^e$	elastischer Anteil des Verzerrungsinkrements
$d\boldsymbol{\epsilon}^p$	plastischer Anteil des Verzerrungsinkrements
f	Fließbedingung
F	Fließfunktion
h	Grenzwert der Fließbedingung
σ_{F0}	Anfangsfließgrenze
$\boldsymbol{D}^e$	elastischer Material-Steifigkeitstensor
$\boldsymbol{D}^{ep}$	elasto-plastischer Material-Steifigkeitstensor
$\mathcal{D}\left(d\boldsymbol{\epsilon}^p\right)$	Dissipationsrate pro Einheitsvolumen
$d\lambda$	skalarer Lagrangescher Multiplikator
κ	skalare Verfestigungsvariable
$d\kappa$	Inkrement der skalaren Verfestigungsvariable
$\bar{\epsilon}^p$	effektive plastische Verzerrung (bzw. äquivalente oder kumulative plastische Verzerrung)
$d\bar{\epsilon}^p$	Inkrement der effektiven plastischen Verzerrung
$\boldsymbol{\sigma}^b$	„Backstress“ Spannungstensor
$d\boldsymbol{\sigma}^b$	Inkrement des „Backstress“ Spannungstensors
$\bar{\boldsymbol{\sigma}}$	Spannungstensor unter Berücksichtigung der Fließflächenverschiebung $\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^b$
$\boldsymbol{H}_K$	kinematischer Verfestigungsterm $\boldsymbol{H}_K = \frac{d\boldsymbol{\sigma}^b}{d\lambda}$
R	isotrope Funktion $h\left(\kappa\right) = \sigma_{F0} + R\left(\kappa\right)$
h_{iso}	Parameter für lineare isotrope Verfestigung
h_{kin}	Parameter für lineare kinematische Verfestigung
D_{α}, β	Parameter für nichtlineare isotrope Verfestigung
C, γ	Parameter für nichtlineare kinematische Verfestigung
Q_i	Kraftgrößenvektor
dQ_i	Inkrement des Kraftgrößenvektors
q_i	Weggrößenvektor
dq_i	Inkrement des Weggrößenvektors
N	Normalkraft
S_y, S_z	Querkräfte
M_y, M_z	Biegemomente
T	Torsionsmoment
W	Verzerrungsenergie
$\Delta u\ bzw\ U$	Relativverschiebungen zwischen den Elemententen
$\Delta\phi\ bzw\ \Phi$	Relativverdrehung zwischen den Elementenden
dq_i^e	elastisches relatives Weggrößeninkrement
dq_i^p	plastisches relatives Weggrößeninkrement
M	Biegemoment
M_{F0}	Anfangsfließmoment

M^b	„Backstress"-Anteil des Moments
$\bar{M}$	Moment unter Berücksichtigung des „Backstress"-Anteils $\bar{M} = M - M^b$
$d\Phi$	Inkrement der Relativverdrehung
$d\Phi^p$	plastischer Anteil des Relativverdrehungsinkrements
K	generalisierte Verfestigungsvariable
$\bar{\Phi}^p$	effektive plastische Relativverdrehung
C_F^e	elastische Federsteifigkeit
C_F^{ep}	elasto-plastische Federsteifigkeit
$\boldsymbol{u}$	Verformungsvektor
$\boldsymbol{f}$	Kraftvektor
$\boldsymbol{K}$	Steifigkeitsmatrix
${}^tM_{ext\,i}$	Gesamtmoment zufolge der äußeren Belastung, zur Zeit t, im Iterationsschritt i
${}^tM_{int\,i}$	Gesamtmoment zufolge der Relativverdrehung, zur Zeit t, im Iterationsschritt i
$\Delta M_{ext\,i}$	Moment zufolge des aktuellen Lastschrittes Δt im Iterationsschritt i
ΔM_i	Residualmoment im Iterationsschritt i
$\Delta\Phi_i$	Relativverformung zufolge des aktuellen Lastschrittes Δt im Iterationsschritt i
$\Delta\Phi_i^p$	plastischer Anteil der Relativverdrehung (Lastschrittes Δt im Iterationsschritt i)
Φ_i^e	gesamter elastischer Anteil der Relativverdrehung im Iterationsschritt i
${}^tC_{F\,i}$	Federsteifigkeit, zur Zeit t, im Iterationsschritt i
$M_{F\,i}$	Fließmoment, im Iterationsschritt i
r	Skalierungsfaktor des „Spannungsvektors" bis zum Erreichen der Fließgrenze (im elastischen Be
n_{Sub}	Anzahl der Subinkremente für das Verfahren nach Euler-Cauchy
$Sub\Phi$	Relativverformungssubinkrement für das Verfahren nach Euler-Cauchy
δ	Balkenendverformung
L	Balkenlänge
Θ	Rotationskapazität bzw. geschoßweiser Abtriftwinkel
Θ_{F0}	Rotation zu Anfangsfließbeginn
Φ_{F0}	Relativverdrehung beim Anfangsfließbeginn
Θ^p	plastischer Rotationsanteil
Φ^p	plastischer Relativverdrehungsanteil
M^p	plastischer Momentenanteil
x	Faktor zum Umrechnen, Rotation in Relativverdrehung

1 Motivation

1.1 Entwicklung

Durch die Erdbeben Northridge in den USA (1994) und Hyogoken-Nanbu in Japan (1995) wurde die Entwicklung der Erdbebenforschung enorm vorangetrieben.

Vor 1994 war in den USA eine typische biegesteife Rahmenecke wie in Abbildung 1.1 ausgebildet. Man dachte, dass diese Verbindungen in der Lage wären, große plastische Rotationen ($> 0,02rad$), ohne signifikante Schädigungen, aufnehmen zu können.

Nach dem Erdbeben Northridge stellte sich heraus, dass viele dieser Verbindungen unerwartet durch sprödes Verhalten versagten. Eine typische Versagensart ist in Abbildung 1.1 dargestellt.

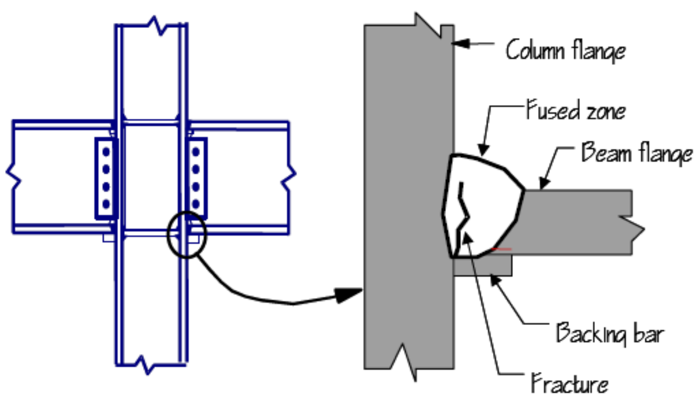

Abbildung 1.1: Typische Verbindung in den USA vor 1994 und deren Versagensart [5]

Seither wurde eine Reihe von Forschungsprojekten und Testreihen durchgeführt, um das Verhalten biegesteifer Rahmenecken besser nachvollziehen zu können. Dabei stellte sich heraus, dass in den Bereichen: Entwurf, Material, Fabrikation, Montage und Qualitätskontrolle teilweise erhebliche Veränderungen erforderlich waren.

Hauptsächlich wurden diese Testprogramme in den USA und in Japan durchgeführt. Aber das Interesse am Verhalten von Verbindungen bei Erdbebenbelastung hat auch die Forschung in Europa beeinflusst. Es starteten verschiedene Forschungsprojekte zu diesem Thema. Die Versuchsergebnisse der amerikanischen und japanischen Verbindungsdetails sind zudem nicht direkt in die europäische Praxis zu übertragen. Im Entwurf, der Dimensionen und der Schweißtechnik sind Unterschiede zu vermerken (siehe [5] und [11]).

1.2 Allgemeine Ausbildung von Bauwerken unter Erdbebeneinwirkung

Bauwerke die für Erdbebeneinwirkung bemessen werden, können laut EC8 [4] entweder für niedrig-dissipatives Tragverhalten (Konzept a)) oder für dissipatives Tragverhalten (Konzept b)) ausgelegt werden.

Konzept a) Bei Bauwerken die für niedrig-dissipatives Tragverhalten ausgelegt werden, können die Schnittgrößen am elastischen Gesamtsystem berechnet werden, es brauchen keine plastischen Effekte berücksichtigt werden. Dieses Auslegungskonzept soll allerdings nur in Fällen geringer Seismizität verwendet werden.

Konzept b) Bei größeren Erdbebenbeanspruchungen soll das Tragwerk in der Lage sein durch elasto-plastisches Verhalten Erdbebenlasten aufzunehmen. Das Tragwerk soll durch duktiles Hystereseverhalten Energie dissipieren. Diese hysteretische Energiedissipation soll hauptsächlich in lokal abgegrenzten Bereichen auftreten, welche als dissipative Bereiche oder kritische Bereiche bezeichnet werden. Dieses Konzept wird hier im Weiteren verfolgt.

1.2.1 Ausbildung duktiler Tragwerke

Damit ein Tragwerk durch plastisches Verhalten Erdbebenbeanspruchungen aufnehmen kann (Konzept b)), muss es eine ausreichende Duktilität aufweisen. Dabei unterscheidet man drei Arten der Duktilität:

- Die Duktilität der gesamten Tragstruktur (plastische Systemreserven statisch unbestimmter Tragwerke)
- Die Duktilität des Strukturelements (z.B. plastische Rotationskapazität von Verbindungen)
- Die Duktilität des Materials

Es muss nachgewiesen werden, dass sowohl die gesamte Tragstruktur als auch die tragenden Bauteile (Strukturelemente) eine ausreichende Duktilität besitzen.

Die Verteilung von Festigkeit, Steifigkeit und Duktilität der einzelnen Tragwerksteile soll so sein, dass sich inelastisches Verhalten in den dafür vorgesehenen Tragwerksteilen ausbilden („dissipative Bereiche"). Es wird erwartet, dass während des Erdbebens die dissipativen Bereiche plastifizieren, bevor andere Tragwerksbereiche den elastischen Bereich verlassen.

Diese dissipativen Bereiche sollen für große plastische Verformungen bemessen und konstruktiv durchgebildet werden. Gleichzeitig ist für alle anderen tragenden Teile eine ausreichende Festigkeit vorzusehen, damit die gewählten Energiedissipationsmechanismen erhalten bleiben.

Da das Erdbebenverhalten eines Bauwerks weitgehend vom Verhalten seiner dissipativen Bereiche abhängt, muss der konstruktiven Durchbildung dieser Bereiche, besondere Sorgfalt bei der Bemessung gewidmet werden.

1.2.2 Lage der dissipativen Bereiche

Mehrgeschossige Rahmentragwerke sollten so entworfen werden, dass sie eine Struktur von stark dimensionierten Stützen und vergleichsweise schwach dimensionierten Balken bilden. Die dissipativen Bereiche (Fließgelenke) sollen sich nicht in den Stützen ausbilden um Stabilitätsprobleme zu verhindern, siehe Abbildung 1.2.

Die Lage des dissipativen Bereichs wird durch die Zusammensetzung, Detaillierung und die Proportionen der Balken, der Stützen und der Verbindungen bestimmt. Dabei können zwei Arten von Balken-Stützen Anschlüssen unterschieden werden, jene mit „voll-resistente" Verbindungen und jene mit „partiell-resistente" Verbindungen, siehe Abbildung 1.3.[5]

.

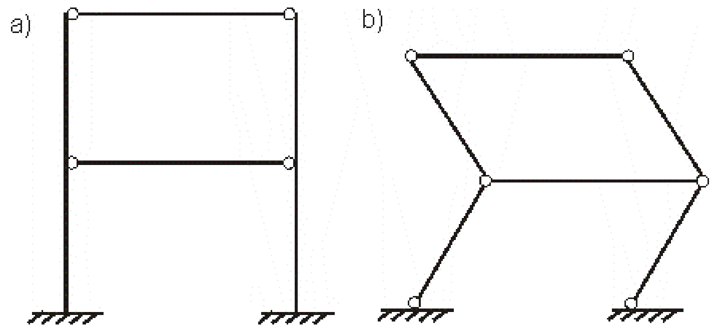

Abbildung 1.2: Ausbildung der Fließgelenke a) in den Balken und b) in den Stützen (Geschossweiser Versagensmechanismus)

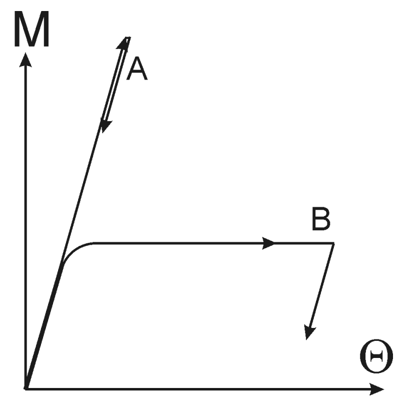

Abbildung 1.3: A Verhalten voll-resistenter Verbindungen und B Verhalten partiell-resistenter Verbindungen im Grenzzustand der Beanspruchbarkeit

1.2.3 „Voll-resistente“ Verbindungen

Der dissipative Bereich (das Fließgelenk) bildet sich im Balken aus. Die Verbindung selbst darf unter gegebener Belastung nicht inelastisch werden. Sie muss für eine ausreichende Überfestigkeit ausgelegt werden, so dass sich die dissipative Zone neben der Verbindung im Balken ausbildet. Hier können Verbindungen verwendet werden, die nicht oder kaum duktil sind.

Diese Verbindungen werden im Weiteren von „voll-resistenten“ Verbindungen genannt.

Das Fließgelenk stellt sich z.B. durch lokales Beulen im Balken-Steg und/oder Balken-Flansch ein.

Dadurch kommt es im Grenzzustand der Beanspruchbarkeit zwar zu einem duktilen aber unkontrollierten Verhalten, da die Lage des Fließgelenks nicht gezielt räumlich gehalten wird.

Voll-resistente Verbindungen können auf unterschiedliche Art ausgeführt sein. Eine Möglichkeit der Ausbildung ist eine geschweißte Verbindung (siehe Abbildung 1.4 links).

Alternativ zu voll verschweißten Verbindungen können auch geschraubte Verbindungen „voll-resistent“ ausgeführt werden. Gut geeignet sind so genannte „Extended end-plate moment connections“ oder „verlängerte Kopfplatten-Verbindungen“ (siehe Abbildung 1.4 rechts). Diese bestehen aus einer Platte, die im Werk auf das Balkenende aufgeschweißt wird, und welche dann an das Verbindungsbauteil angeschraubt wird [15].

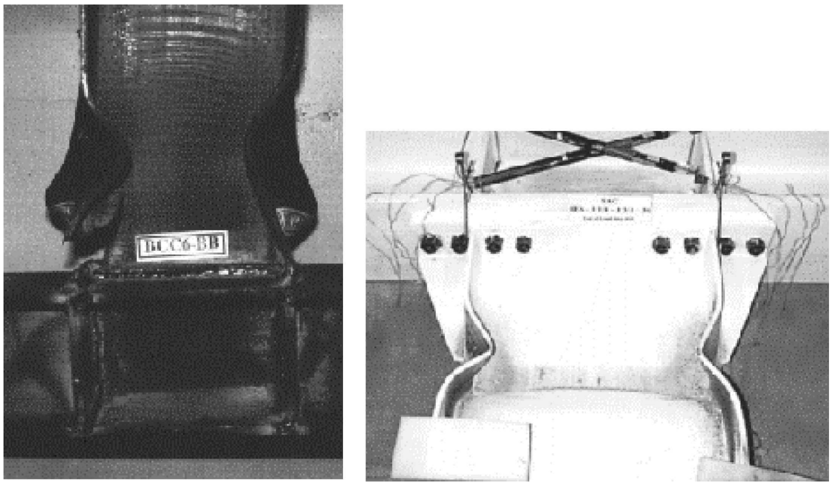

Abbildung 1.4: Voll-resistente Verbindungen, links: geschweißt [11], rechts: geschraubte Kopfplatten-Verbindung [15]

1.2.4 „Partiell-resistente“ Verbindungen

Bei Anschlüssen mit „partiell-resistenten“ Verbindungen bildet sich der dissipative Bereich in der Verbindung aus. Eine solche Verbindung soll eine hohe Duktilität (plastische Rotationskapazität) aufweisen und die Festigkeit muss geringer sein als die der angrenzenden Tragwerksteile (Stützen und Balken).

Dadurch sind die Bereiche der plastischen Verformungen räumlich begrenzt und das Auftreten massiver plastischer Verformungen kann gezielt gesteuert werden.

Es ist sicher zu stellen, dass sich die Verbindung plastisch duktil verhält und nicht spröde versagt (siehe [5]). Sprödes Versagen entsteht z.B. durch Schub- oder Bruchversagen der Schrauben.

Verschiedene Versagensmechanismen von geschraubten Kopfplattenverbindungen sind in Abbildung 1.5 ersichtlich ($\wr\wr$ stellt dabei das Schraubenversagen dar).

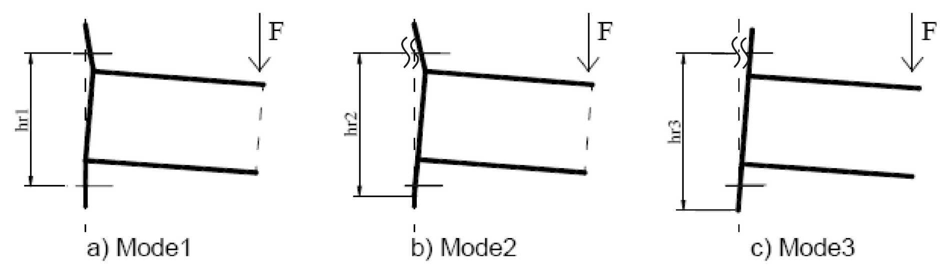

Abbildung 1.5: Versagensmechanismen [13]

Mode 1: ist ein duktiler Versagensmechanismus. Das Versagen tritt durch die Verformung der Stirnplatte ein (siehe Abbildung 1.6)
Mode 2: das Versagen tritt durch eine Kombination aus Stirnplatten-Verformung und Schraubenbruch ein.
Mode 3: dieser Mechanismus entsteht durch das Versagen der Schrauben. Das ist ein unerwünschter spröder Versagensmechanismus (siehe Abbildung 1.6).

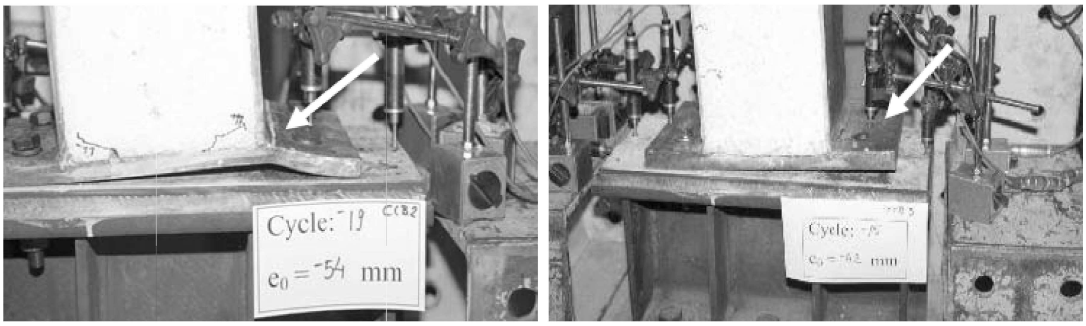

Abbildung 1.6: Partiell-resistente Verbindungen, links: Versagen der Stirnplatte (duktil), rechts: Versagen der Schrauben (spröde) [13]

1.2.5 Ausbildung von Verbindungen nach EC8

Unabhängig von der Lage des dissipativen Bereichs, sind Rahmenecken so auszulegen, dass die benötigte plastische Rotationskapazität Θ^p im Bereich des Fließgelenks aufgenommen weden kann.

Für Tragwerke mit hoher Duktilität (Duktilitätsklasse DCH) soll die Rotationskapazität Θ^p mindestens 35 mrad betragen und für Tragwerke mit mittlerer Duktilität (Duktilitätsklasse DCM) soll Θ^p mindestens 25 mrad betragen.

Die Rotationskapazität Θ^p ist laut EC8 [4] folgendermaßen definiert (siehe Abbildung 1.7):

$$\Theta^p = \delta/0.5L \tag{1.1}$$

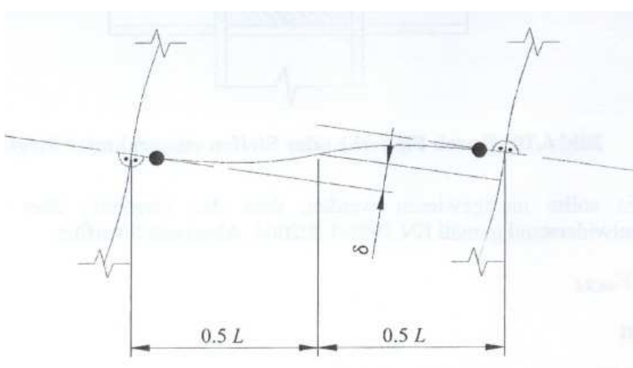

Abbildung 1.7: Rotationskapazität Θ^p [4]

Dabei ist δ die Durchbiegung in Trägermitte und L ist die Spannweite des Trägers. Die Rotationskapazität im Bereich des Fließgelenks sollte unter zyklischer Belastung erhalten bleiben [4].

1.3 Aufgabenstellung

In dieser Arbeit werden im Weiteren ebene Stabwerke mit partiell-resistenten Verbindungen untersucht. Es wird angenommen, dass nur die dafür vorgesehenen Verbindungen plastifizieren, während alle anderen Teile des Tragwerks im elastischen Bereich bleiben.

Das tatsächliche Momenten- Rotations- Verhalten solcher Verbindungen hängt von vielen verschiedenen mechanischen und geometrischen Parametern ab. Hier werden diese Verbindungen im Weiteren vereinfacht durch Drehfedern simuliert. Für diese Drehfedern werden geeignete konstitutive Beziehungen eingeführt um das Verhalten unter zyklischer Beanspruchung nachstellen zu können.

Zunächst werden im Kapitel 2 allgemeine konstitutive Beziehungen für elasto-plastisches Verhalten eines drei-dimensionalen Kontinuums beschrieben.

Im Kapitel 3 werden die konstitutiven Beziehungen für ebene Stabtragwerke in eine generalisierte Form überführt und im Speziellen für den Fall der reinen Biegebeanspruchung in ein eindimensionales Gleichungssystem reduziert.

Diese konstitutiven Beziehungen werden im Kapitel 4 in das Finite Elemente Programm ANSYS [1] implementiert.

Zum Schluss in Kapitel 5 wird das Verhalten ebener Rahmentragwerke unter zyklischer Beanspruchung berechnet. Dazu werden die erforderlichen Drehfederparameter für zwei verschiedene Verbindungen aus Versuchsergebnissen identifiziert. Mit diesen Parametern kann nun das Systemverhalten ebener Rahmentragwerke simuliert werden.

2 Konstitutives Modell des 3D Kontinuums

2.1 Allgemeines

Zur Beschreibung des mechanisch-thermischen Verhaltens von Werkstoffen werden in der Kontinuumsmechanik verschiedene mathematische Modelle aufgestellt. Dabei kann man vier Kategorien der Materialantwort unterscheiden: das zeitunabhängige bzw. -abhängige Materialverhalten jeweils ohne und mit Hystereseeigenschaften. Damit werden vier Materialtheorien in Verbindung gebracht:

- die Elastizitätstheorie
- die Plastizitätstheorie
- die Viskoelastizität
- die Viskoplastizität

Im weiteren wird hier die Plastizitätstheorie behandelt.

Bei elastischem Materialverhalten gilt das Hooke´sche Gesetz. Es beschreibt den linearen Zusammenhang zwischen den im Kontinuum wirkenden Spannungen $\boldsymbol{\sigma}$ und den Verzerrungen $\boldsymbol{\epsilon}$:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D}^e : \boldsymbol{\epsilon} \tag{2.1}$$

$\boldsymbol{D}^e$ ist der konstante, elastische Material-Steifigkeitstensor.

Bei der elasto-plastische Formänderung wird die Verzerrungsarbeit fast vollständig in Wärme umgesetzt (dissipiert), nur ein geringer Teil wirkt sich auf die Verfestigung aus (latente Energie). Die lineare Beziehung aus Gleichung 2.1 gilt daher nicht mehr.

Es muss eine andere Stoffgleichung formuliert werden, die den nichtlinearen Zusammenhang zwischen den im Kontinuum wirkenden Spannungen und den Dehnungen beschreibt. In inkrementeller Form kann diese Stoffgleichung analog zu Gleichung 2.1 ausgedrückt werden.

$$d\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D}^{ep} : d\boldsymbol{\epsilon} \tag{2.2}$$

Dabei ist $\boldsymbol{D}^{ep}$ der aktuelle elasto-plastische Material-Steifigkeitstensor, $d\boldsymbol{\sigma}$ ist der differentielle Spannungszuwachs und $d\boldsymbol{\epsilon}$ ist der differentielle Verzerrungszuwachs. Ziel der Plastizitätstheorie ist es, diesen konstitutiven Zusammenhang zu formulieren.

Die klassische Plastizitätstheorie basiert auf drei grundlegenden Ideen:

- Die Fließbedingung, beschreibt die Grenze des elastischen Bereichs.
- Die Fließregel, beschreibt die Richtung des plastischen Verzerrungsinkrements.
- Die Verfestigung, sie beschreibt die Evolution der Fließbedingung während der plastischen Verzerrung.

Beim eindimensionalen Zugversuch tritt nach Erreichen der Zugfließgrenze σ_{F0} Fließen ein. Danach nimmt die Dehnung unproportional zu. Bei Be- und Entlastung des Werkstoffes ergeben sich Hysteresisschleifen Abbildung 2.1, deren eingeschlossene Fläche die pro Belastungszyklus dissipierte Energie darstellt [2].

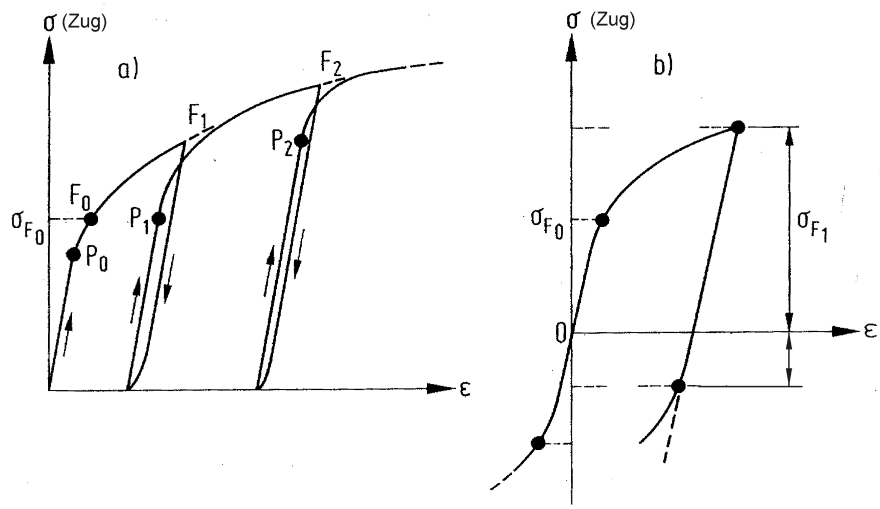

Abbildung 2.1: Hysteresisschleifen bei Be- und Entlastung [2]

2.2 Fließbedingung (Fließfunktion)

Die Fließbedingung definiert den elastischen Bereich eines Materials. Plastische Formänderungen können nur auftreten, wenn die Fließbedingung erfüllt ist. Für das einaxial belastete Material treten plastische Formänderungen ab dem Erreichen der Fließspannung σ_{F0} auf. Im allgemeinen Fall lässt sich die Fließbedingung in Abhängigkeit des Spannungszustandes σ_{ij} oder des Verzerrungszustandes ϵ_{ij} darstellen.

$$f\left(\sigma_{ij}\right) = 0 \tag{2.3}$$

$$f^*\left(\epsilon_{ij}\right) = 0 \tag{2.4}$$

Für sogenannte „Standard Materialien“ (siehe Abschnitt 2.3) kann die Fließbedingung im Spannungsraum σ_{ij} ausgedrückt werden. Davon wird im Weiteren ausgegangen. Bei anderem Materialverhalten, z.B. im Falle von instabilem Materialverhalten, muss die Fließbedingung im Verzerrungsraum ϵ_{ij} ausgedrückt werden. Genaueres dazu ist im Abschnitt 2.3 nachzulesen.

Befindet sich der Spannungszustand im elastischen Bereich, dann ist der Wert der Fließbedingung $f < 0$, während des plastischen Fließens ist die Fließbedingung $f = 0$ erfüllt.

Fließfläche

Die Fließfläche hat im Spannungsraum die Form einer Fläche (der Fließfläche).

Um diese Fließfläche besser darstellen zu können, kann sie bei isotropem Materialverhalten durch die Hauptspannungen oder durch die Spannungsinvarianten ausgedrückt werden (siehe Anhang A). Im sechsdimensionalen Spannungsraum würde eine fünfdimensionale Hyperfläche aufgespannt werden.

Die Fließbedingung, ausgedrückt durch die Hauptspannungen σ_1 ,σ_2 und σ_3, hat folgende Form:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0 \tag{2.5}$$

oder sie kann durch die Invarianten I_1 ,I_2 und I_3 ausgedrückt werden.

$$f(I_1, I_2, I_3) = 0 \tag{2.6}$$

Die Fließfläche kann auch zwei-dimensional dargestellt werden. Dazu muss sie auf die Oktaederebene projeziert werden. Die Oktaederebene (auch π-Ebene genannt) entspricht einem Oktant im Hauptspannungsraum, sie ist normal zur Raumdiagonalen „n" im Hauptspannungsraum aufgespannt siehe Abbildung 2.2 und Abbildung 2.3.

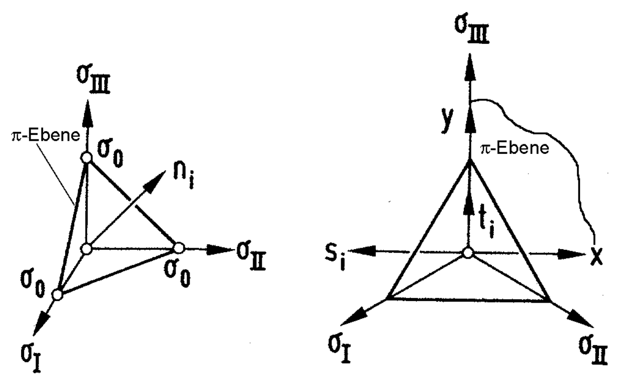

Abbildung 2.2: Oktaederebene im Hauptspannungsraum [2]

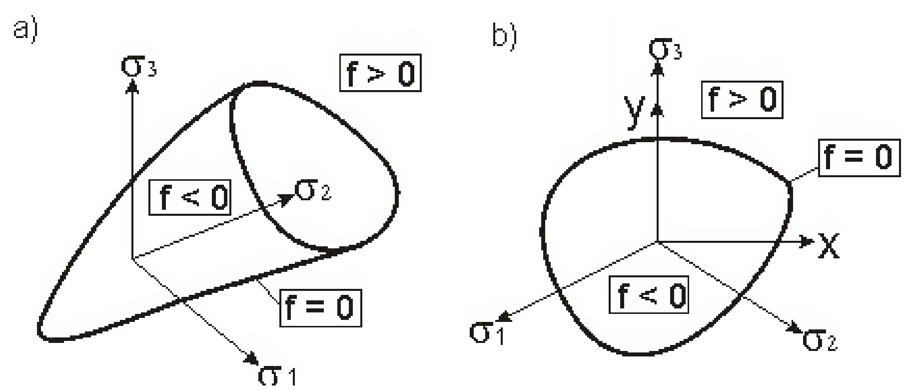

Abbildung 2.3: Fließfläche a) im Hauptspannungsraum und b) in der Oktaederebene

Wenn sich der Spannungszustand innerhalb dieser Fläche befindet, werden ausschließlich elastische Deformationen erzeugt (hier gilt $f < 0$). Erreicht der Spannungszustand die Fließfläche, werden elasto-plastische Deformationen erzeugt (die Fließbedingung ist erfüllt $f = 0$).

Deviatorisches Verhalten

Bei Metallen wird angenommen, dass unter hydrostatischem Druck keine plastischen Verformungen entstehen. Die aufnehmbaren Schubkräfte sind dann unabhängig vom hydrostatischen Spannungszustand (siehe Abbildung 2.4). Deshalb kann die Fließbedingung auch alleine durch ihre deviatorischen Anteile formuliert werden.

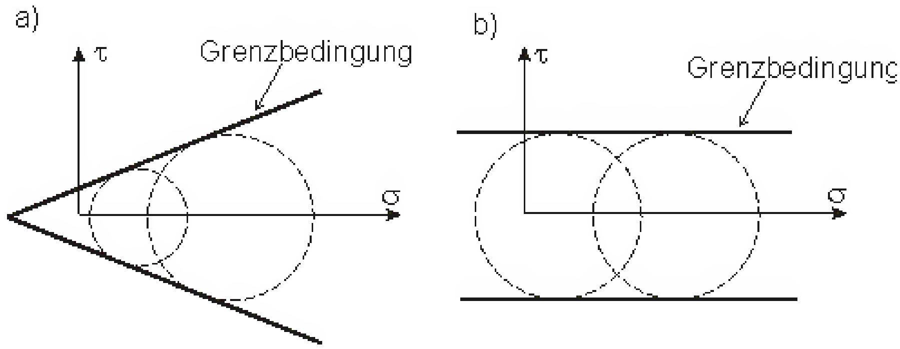

Abbildung 2.4: Mohr-Coulomsche Fließbedingung, a) abhängig und b) unabhängig vom hydrostatischen Druck

Die Spannungen werden dafür in einen hydrostatischen und in einen deviatorischen Anteil zerlegt. Die deviatorischen Anteile der Hauptspannungen $\sigma_1^{'}$, $\sigma_2^{'}$ und $\sigma_3^{'}$ und die Invarianten des Deviators J_1, J_2 und J_3 sind in Anhang A beschrieben. Die Fließbedingung kann dann folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$f\left(\sigma_1^{'}, \sigma_2^{'}, \sigma_3^{'}\right) = 0 \tag{2.7}$$

oder

$$f\left(J_1, J_2, J_3\right) = 0 \tag{2.8}$$

Fließfunktion

Die Fließbedingung ($f = 0$) wird im Weiteren in zwei Anteile aufgespalten, in einen Anteil F (der hier als Fließfunktion bezeichnet wird) und in den Grenzwert h.

$$f = F - h = 0 \tag{2.9}$$

Während des plastischen Fließens kann sich sowohl F, als auch h verändern, darauf wird später eingegangen. In den folgenden Abschnitten werden verschiedene Arten von Fließfunktionen F beschrieben.

2.2.1 Tresca‘sche Fließfunktion

Die Tresca‘sche Fließfunktion (1864) beschreibt ein plastisches Materialverhalten, welches unabhängig vom hydrostatischen Druck ist. Im Hauptspannungsraum hat sie die Form eines hexagonalen Prismas, siehe Abbildung 2.5. Nach Tresca beginnen Werkstoffe zu fließen, wenn die größte Schubspannung einen kritischen Wert h erreicht hat (Schubspannungshypothese). Mit der Annahme $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ kann die Bedingung folgendermaßen formuliert werden:

$$f = F - h = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - h = 0 \tag{2.10}$$

Der Grenzwert h ist von Verfestigungsparametern abhängig, die experimentell gefunden werden müssen (siehe dazu Abschnitt 2.6). Im perfekt plastischen Material ist h eine Konstante. Die Fließfläche nach Tresca kann im Hauptspannungsraum oder in der Oktaederebene dargestellt werden (siehe

Abbildung 2.5). Auf Grund der Singularitäten an den Eckpunkten, resultieren bei der Tresca Fließfunktion nicht immer eindeutige Lösungen, bei der Von Mises Bedingung gibt es solche Singularitäten nicht.

2.2.2 Von Mises Fließfunktion

Die von Mises Bedingung (1913) ist wie die Tresca Bedingung auch unabhängig vom hydrostatischen Spannungungszustand, sie wird häufig zur Beschreibung von Metallen verwendet. Die von Mises Fließfunktion kann wie in Gleichung 2.11 formuliert werden. Sie hat im Hauptspannungsraum die Form eines Zylinders, siehe Abbildung 2.5.

$$f = F - h = \sqrt{3J_2} - h = 0 \tag{2.11}$$

Dabei ist J_2 die zweite Invariante des deviatorischen Spannungszustandes.

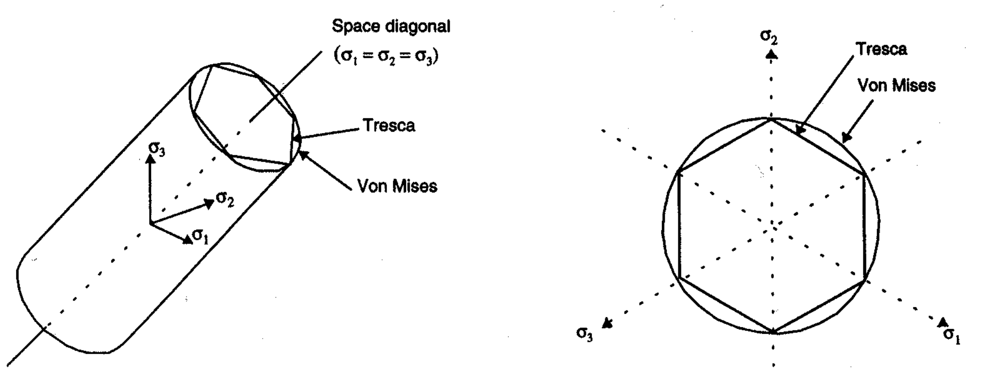

Abbildung 2.5: Fließbedingung nach Tresca und Von Mises [16]

2.2.3 Weitere Fließfunktionen

Im Gegensatz zu Metallen sind bei anderen Werkstoffen z.B. im Betonbau oder im Grundbau die aufnehmbaren Schubkräfte sehr wohl vom hydrostatischen Spannungszustand abhängig. Bei höherem hydrostatischen Druck können größere Schubkräfte aufgenommen werden. Hier müssen andere Fließbedingungen verwendet werden, z.B. die Mohr-Coulomb Fließbedingung (1773) oder die Drucker-Prager Fließbedingung (1952), siehe Abbildung 2.6. Weiterführende Beschreibungen dazu sind in [2] und [16] zu finden.

2.3 Fließregel

Im vorherigen Abschnitt wurden verschiedene Fließbedingungen behandelt. Um das elasto-plastische Materialverhalten zu beschreiben, ist die Fließbedingung aber nicht ausreichend. Es ist eine zusätzliche Regel einzuführen, um die Evolution des plastischen Fließens beschreiben zu können. Üblicherweise wird daher ergänzend zur Fließbedingung die Fließregel eingeführt.

Die Fließregel definiert die Richtung des plastischen Fließens. Es gibt verschiedene Fließregeln, je nach Materialverhalten muss eine geeignete Fließregel ausgewählt werden.

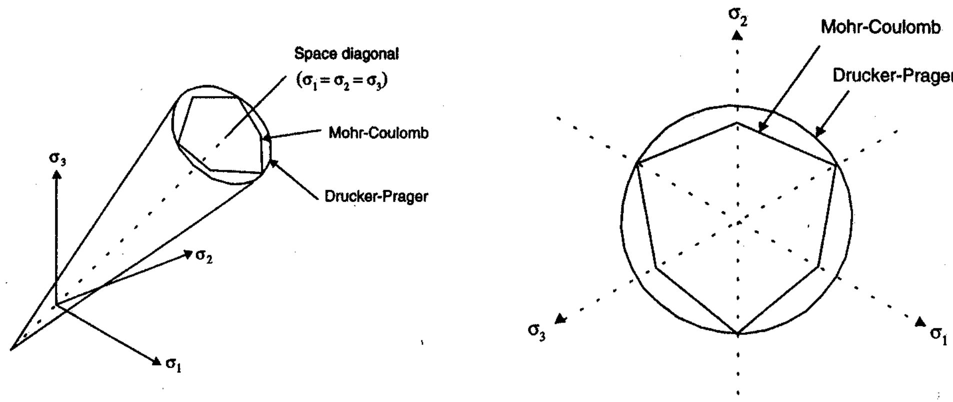

Abbildung 2.6: Fließbedingung nach Mohr-Coulomb und Drucker-Prager [16]

Eine dieser Fließregeln ist das „Postulat der maximalen plastischen Dissipation“ (Von Mises, 1928). Dieser Ansatz wird hier im Weiteren behandelt. Er spielt eine Schlüsselrolle in der plastischen Analyse, da er vom mathematischen Standpunkt her am angenehmsten ist. Allerdings charakterisiert diese Fließregel nur eine bestimmte Gruppe von Materialmodellen, die „Standard Materialien“. Das sind stabile Werkstoffe, d.h. das Stabilitätskriterium $\Delta\sigma\Delta\epsilon^p \geq 0$ muss erfüllt sein.

In dem Falle, dass die Bedingungen der oben genannten Fließregel nicht auf das Materialverhalten zutreffen, muss eine andere Fließregel verwendet werden (z.B. bei instabilem Werkstoffverhalten). Das Il'iushin Postulat (1975) kann für stabiles und instabiles Werkstoffverhalten herangezogen werden, es basiert auf dem Ansatz der „nichtnegativen Arbeit“ über einen geschlossenen Verzerrungszyklus. Dafür müssen die Gleichungen im Verzerrungsraum formuliert werden, wie in Gleichung 2.4. Das wird hier aber nicht weiter behandelt, siehe dazu [16] und [17].

In dieser Arbeit wird im Weiterem das Postulat der „maximalen plastischen Dissipation“ angewendet.

2.3.1 Postulat der maximalen plastischen Dissipation

Nach dem „Postulat der maximalen plastischen Dissipation“ stellt sich der Spannungszustand bei einem vorgegebenen plastischen Verzerrungsinkrement so ein, dass die dissipative plastische Arbeit maximal wird, siehe [2].

Dieses Postulat kann mathematisch durch $\mathcal{D}\left(d\epsilon^p\right) = max$ ausgedrückt werden, dabei ist $\mathcal{D}\left(d\boldsymbol{\epsilon}^p\right)$ die Dissipationsrate pro Einheitsvolumen.

$$\mathcal{D}\left(d\boldsymbol{\epsilon}^p\right) = \boldsymbol{\sigma} : d\boldsymbol{\epsilon}^p = max \tag{2.12}$$

In dieser Aussage sind zwei Bedingungen enthalten:

- „Normalität“: der Vektor $d\epsilon^p$ steht immer senkrecht zur Fließfläche.
- „Konvexität“: der Werkstoff verhält sich stabil. Das Stabilitätskriterium $\Delta\sigma\Delta\epsilon^p \geq 0$ ist nur dann erfüllt, wenn die Form der Fließfläche konvex ist.

Durch die beiden Anforderungen „Normalität“ und „Konvexität“ gilt diese Fließregel nicht für alle Arten von Materialverhalten. Verhält sich ein Werkstoff z.B. instabil, kann sich eine teilweise konkave Fließhyperfläche einstellen, siehe dazu [17], [2].

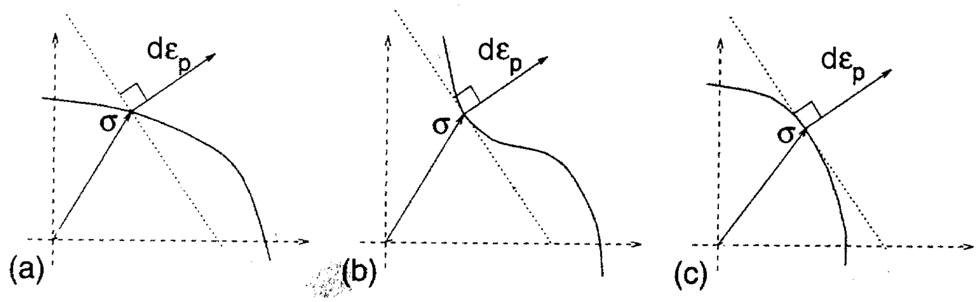

Abbildung 2.7: „Konvexität“ und „Normalität“ der Fließfläche [17]

In Abbildung 2.7 sind diese Bedingungen dargestellt: in (a) ist die „Normalität“ nicht erfüllt, in (b) ist die „Konvexität“ nicht erfüllt, nur in (c) sind beide Bedingungen erfüllt.

Mit Gleichung 2.12 ist ein Extremwertproblem gegeben. Zusätzlich kann eine Nebenbedingung eingeführt werden. Da im plastischen Bereich die Fließbedingung immer erfüllt sein muss, lautet hier die Nebenbedingung:

$$f\left(\boldsymbol{\sigma}\right) = 0 \tag{2.13}$$

Dieses mathematische Problem (Extremwertproblem mit Nebenbedingung) lässt sich mit Hilfe der „Lagrangeschen Multiplikatorenmethode“ lösen:

Es wird eine lokale Extremalstelle $\boldsymbol{\sigma}$ von der Funktion $\mathcal{D}\left(d\boldsymbol{\epsilon}^p\right)$ gesucht unter der Nebenbedingung $f\left(\boldsymbol{\sigma}\right) = 0$. Dabei gibt es genau ein $d\lambda$, so dass $[\boldsymbol{\sigma}, d\lambda]$ ein stationärer Punkt der „Lagrange Funktion“ L ist. Die Lagrange Funktion ist in diesem Fall:

$$L\left(\boldsymbol{\sigma}, d\lambda\right) = \mathcal{D}\left(d\boldsymbol{\epsilon}^p\right) - d\lambda f\left(\boldsymbol{\sigma}\right) = \boldsymbol{\sigma} : d\boldsymbol{\epsilon}^p - d\lambda f\left(\boldsymbol{\sigma}\right) \tag{2.14}$$

Die partielle Ableitung von L nach den Veränderlichen (hier $\boldsymbol{\sigma}$) kann nun zu Null gesetzt werden:

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial\left[\boldsymbol{\sigma} : d\boldsymbol{\epsilon}^p - d\lambda f\left(\boldsymbol{\sigma}\right)\right]}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = 0 \tag{2.15}$$

Dabei ist $d\lambda$ der skalare, konstante Lagrangesche Multiplikator, dieser muss ≥ 0 sein und bringt die beiden Bedingungen in Beziehung zueinander. Später wird es möglich sein diesen Multiplikator zu berechnen.

Da $d\boldsymbol{\epsilon}^p$ keine Funktion von $\boldsymbol{\sigma}$ ist, kann Gleichung 2.15 auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : d\boldsymbol{\epsilon}^p - d\lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = 0 \tag{2.16}$$

Nach dieser Methode ergibt sich die Fließregel (in diesem Fall auch Normalenregel oder assoziierte Fließregel genannt) zu:

$$d\boldsymbol{\epsilon}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \tag{2.17}$$

2.4 Fundamentale Gleichungen

Die gesamte Verzerrung setzt sich aus einem elastischen (reversiblen) Anteil $\boldsymbol{\epsilon}^e$ und einem plastischen (irreversiblen) Anteil $\boldsymbol{\epsilon}^p$ zusammen. Für das Verzerrungsinkrement gilt:

$$d\boldsymbol{\epsilon} = d\boldsymbol{\epsilon}^e + d\boldsymbol{\epsilon}^p \tag{2.18}$$

Die additive Aufspaltung der Gesamtverzerrung in einen elastischen und einen plastischen Anteil gilt nur näherungsweise bei nicht allzugroßen Verzerrungen. Im Weiteren wird von dieser Annahme ausgegangen. Die Beziehung zwischen dem elastischen Verzerrungsanteil und der Spannung kann wie in der linearen Elastizitätstheorie ausgedrückt werden. Dabei ist $\boldsymbol{D}^e$ der elastische Material-Steifigkeitstensor.

$$d\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D}^e : d\boldsymbol{\epsilon}^e \tag{2.19}$$

Aus den Gleichungen 2.18 und 2.19 folgt

$$d\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D}^e : (d\boldsymbol{\epsilon} - d\boldsymbol{\epsilon}^p) \tag{2.20}$$

2.4.1 Konsistenzbedingung

Im elastischen Bereich ist die Fließbedingung negativ $f < 0$ und für den Lagrangeschen Multiplikator gilt $d\lambda = 0$. Während der plastischen Belastung muß die Fließbedingung erfüllt sein $f = 0$ und der Lagrangesche Multiplikator ist positiv $d\lambda > 0$. Diese Fälle können mit den „Belastungs- /Entlastungs-Konditionen“ beschrieben werden (Tab. 2.1).

elastischer Bereich	$f < 0$	$d\lambda = 0$
plastischer Bereich	$f = 0$	$d\lambda > 0$
neutraler Bereich	$f = 0$	$d\lambda = 0$

Tabelle 2.1: Belastungs- /Entlastungs- Konditionen

Allgemein gilt folgende Beziehung:

$$d\lambda\, f = 0 \tag{2.21}$$

Im plastischen Bereich gilt neben der Fließbedingung ($f = 0$) auch die Konsistenzbedingung: $df = 0$. Auch die differentielle Form der Fließbedingung (das totale Differential) muss Null sein. Für den allgemeinen Fall kann die Konsistenzbedingung folgendermaßen geschrieben werden:

$$d\lambda df = 0 \tag{2.22}$$

Betrachtet man nur den plastischen Bereich und wendet die Kettenregel an, so erhält man für ein ideal plastisches Material folgende Form der Konsistenzbedingung:

$$df\,(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : d\boldsymbol{\sigma} = 0 \tag{2.23}$$

Wobei $d\boldsymbol{\sigma}$ der differentielle Zuwachs der Spannungen ist.

2.5 Stoffgleichung ohne Verfestigung

Aus den obigen Abschnitten sind nun genügend Gesetzmäßigkeiten bekannt, um die Stoffgleichung (2.2) für ein plastisches Material ohne Verfestigung (ideal plastisches Material) formulieren zu können (siehe [17] und [16]). Dazu wird zunächst der Lagrangesche Multiplikator $d\lambda$ aufgestellt, mit dessen Hilfe anschließend der „elasto-plastische Material-Steifigkeitstensor“ $\boldsymbol{D}^{ep}$ formuliert werden kann.

Lagrangescher Multiplikator

Aus der Beziehung 2.20 erhält man durch Einsetzen der Normalenregel (bzw. der „assoziierten Fließregel“) 2.17, für den differentiellen Spannungszuwachs:

$$d\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D}^e : \left(d\boldsymbol{\epsilon} - d\lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \tag{2.24}$$

Setzt man diesen differentiellen Spannungszuwachs in die Konsistenzbedingung 2.23 ein, ergibt sich

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{D}^e : \left(d\boldsymbol{\epsilon} - d\lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) = 0 \tag{2.25}$$

und durch Umformen erhält man nun die Lösung für den Lagrangeschen Multiplikator

$$d\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{D}^e : d\boldsymbol{\epsilon}}{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{D}^e : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}} \tag{2.26}$$

Elasto-plastischer Material-Steifigkeitstensor

Der elasto-plastische Material-Steifigkeitstensor $\boldsymbol{D}^{ep}$ (oder Tangenten-Modul-Tensor) beschreibt die Beziehung zwischen dem Spannungs- und dem Verzerrungs-Inkrement. Die Stoffgleichung lautet:

$$d\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D}^{ep} : d\boldsymbol{\epsilon} \tag{2.27}$$

Wird Gleichung 2.24 so umgeformt, dass $d\boldsymbol{\epsilon}$ herausgehoben wird, erhält man

$$d\boldsymbol{\sigma} = \left(\boldsymbol{D}^e - \boldsymbol{D}^e : d\lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \frac{1}{d\boldsymbol{\epsilon}} \right) : d\boldsymbol{\epsilon} \tag{2.28}$$

Dann ist ersichtlich, dass sich der elasto-plastische Material-Steifigkeitstensor aus 2.27 zu

$$\boldsymbol{D}^{ep} = \left(\boldsymbol{D}^e - \boldsymbol{D}^e : d\lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \frac{1}{d\boldsymbol{\epsilon}} \right) \tag{2.29}$$

ergibt. Durch Einsetzen des Lagrangeschen Multiplikators aus Gleichung 2.26 erhält man die Form

$$\boldsymbol{D}^{ep} = \boldsymbol{D}^e - \frac{\boldsymbol{D}^e : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \otimes \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{D}^e}{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{D}^e : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}} \tag{2.30}$$

2.6 Verfestigung

Im vorherigen Abschnitt wurde davon ausgegangen, dass sich während des plastischen Fließens keine Verfestigung einstellt. Dieses Verhalten wird ideal-plastisches Materialverhalten genannt. In der Realität kommt es während des Fließvorganges zu Veränderungen der Fließbedingung. Die Fließfläche (und damit der elastische Bereich) verändert ihre Größe (isotrope Verfestigung) oder ihre Position (kinematische Verfestigung) oder beides (gemischte Verfestigung).

Dafür wird zunächst der elasto-plastische Steifigkeitstensor für die isotrope, kinematische und gemischte Verfestigung hergeleitet, und im Weiteren werden Verfestigungsgesetze beschrieben, die in den Material-Steifigkeitstensor eingesetzt werden können.

2.6.1 Isotrope Verfestigung

Bei der isotropen Verfestigung verändert sich die Größe der Fließfläche während der plastischen Belastung.

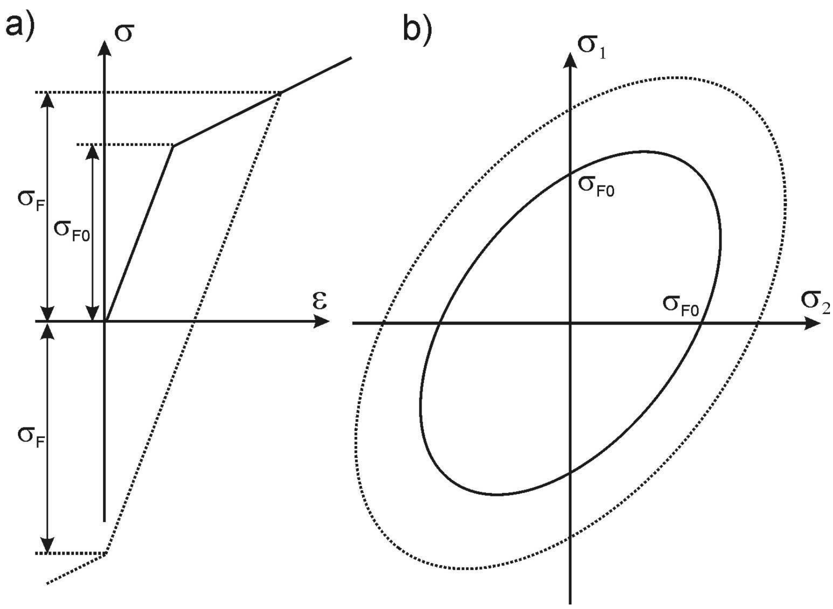

Abbildung 2.8: Isotrope Verfestigung: a) einaxial, b) Veränderung der Fließfläche für biaxiale Spannungszustände

Die Fließbedingung hat dann folgende Form

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) = F(\boldsymbol{\sigma}) - h(\kappa) \tag{2.31}$$

wobei $F(\boldsymbol{\sigma})$ die gewählte Fließfunktion ist. Der Grenzwert ist in diesem Fall $h(\kappa)$. Dieser Grenzwert stellt die aktuelle Fließgrenze dar und ist im Falle der isotropen Verfestigung nicht mehr konstant. Die Veränderung des Grenzwertes wird durch das isotrope Verfestigungsgesetz beschrieben.

Es wird zwischen der „Verzerrungs-Verfestigung“ und der „Arbeits-Verfestigung“ unterschieden. Wenn nur einaxiale Testergebnisse vorhanden sind, lässt sich nicht sagen, welches Modell besser geeignet ist. Und für Fließfunktionen die nur von der zweiten Invarianten J_2 abhängen (z.B. die Von Mises Fließfunktion) sind beide Modelle komplett gleich. Um beide Möglichkeiten abzudecken, wird die Verfestigungsvariable κ eingeführt. Im Falle der „Verzerrungs-Verfestigung“ (die hier weiter verfolgt wird) entspricht κ der plastischen Verzerrung. Die plastische Verzerrung $\boldsymbol{\epsilon}^p$ ist ein Tensor zweiter

Ordnung. Für das Verfestigungsgesetz muss aber eine skalare Größe gefunden werden, welche das Maß der Verzerrung $\boldsymbol{\epsilon}^p$ ausdrückt. Aus diesem Grund wird die skalare „effektive plastische Verzerrung" $\bar{\epsilon}^p$ eingeführt (auch „equivalente plastische Verzerrung" oder „cumulative plastische Verzerrung" genannt).

$$d\kappa = d\bar{\epsilon}^p = \sqrt{\frac{2}{3}} \left\| d\boldsymbol{\epsilon}^p \right\| = \sqrt{\frac{2}{3} d\boldsymbol{\epsilon}^p : d\boldsymbol{\epsilon}^p} \tag{2.32}$$

$\left\| d\boldsymbol{\epsilon}^p \right\|$ stellt dabei die euklidische Norm über $d\boldsymbol{\epsilon}^p$ dar. Der Skalierungsfaktor $\sqrt{\frac{2}{3}}$ ist so gewählt, dass $d\bar{\epsilon}^p$ dem plastischen Dehnungsinkrement eines einaxialen Spannungstests entspricht. Der Skalierungsfaktor hat nur für die Tresca- und die von Mises- Bedingung den Wert $\sqrt{\frac{2}{3}}$, für alle anderen Fließbedingungen sind andere Skalierungsfaktoren einzusetzen.

Die Konsistenzbedingung nach Gleichung 2.23 ergibt sich für die isotrope Verfestigung ($f = f(\boldsymbol{\sigma}, \kappa)$) zu:

$$df = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : d\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial \kappa} d\kappa = 0 \tag{2.33}$$

Nun können die einzelnen Terme der Konsistenzbedingung durch die Gleichungen 2.34 bis 2.37 ersetzt werden.

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial F\left(\boldsymbol{\sigma}\right)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \tag{2.34}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \kappa} = -\frac{\partial h\left(\kappa\right)}{\partial \kappa} \tag{2.35}$$

In Gleichung 2.36 wird für die Verfestigungsvariable $d\kappa$ die „effektive plastische Verzerrung" eingesetzt. Für $d\boldsymbol{\epsilon}^p$ wird die Fließregel (Normalenregel) aus Gleichung 2.17 verwendet, um dann für die Berechnung den Lagrangeschen Multiplikator $d\lambda$ herausheben zu können ($d\lambda$ ist immer positiv).

$$d\kappa = \sqrt{\frac{2}{3}} \left\| d\boldsymbol{\epsilon}^p \right\| = \sqrt{\frac{2}{3}} \left\| \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\| d\lambda \tag{2.36}$$

Für $d\boldsymbol{\sigma}$ können die Bedingungen aus dem vorherigen Abschnitt eingesetzt werden, siehe Gleichung 2.24.

$$d\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D}^e : \left(d\boldsymbol{\epsilon} - d\lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \tag{2.37}$$

Durch Einsetzen dieser Gleichungen in die Konsistenzbedingung 2.33 und durch Umformen ergibt sich der Lagrangesche Multiplikator zu

$$d\lambda = \frac{\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{D}^e : d\boldsymbol{\epsilon}}{\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{D}^e : \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial h(\kappa)}{\partial \kappa} \sqrt{\frac{2}{3}} \left\| \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\|} \tag{2.38}$$

Mit Hilfe der Gleichung 2.29 kann nun der elasto-plastische Material-Steifigkeitstensor für isotrope Verfestigung aufgestellt werden.

$$\boldsymbol{D}^{ep} = \boldsymbol{D}^e - \frac{\boldsymbol{D}^e : \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \otimes \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{D}^e}{\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{D}^e : \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial h(\kappa)}{\partial \kappa} \sqrt{\frac{2}{3}} \left\| \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\|} \tag{2.39}$$

Im Vergleich zum elasto-plastischen Material-Steifigkeitstensor ohne Verfestigung (aus Gleichung 2.30), kommt für die isotrope Verfestigung ein zusätzlicher Term im Nenner hinzu.

2.6.2 Kinematische Verfestigung

Die kinematische Verfestigung (auch Bauschinger-Effekt genannt) bekommt speziell bei der Entlastung und bei zyklischer Belastung eine Bedeutung. Hierbei verschiebt sich die Lage der Fließfläche während der plastischen Beanspruchung.

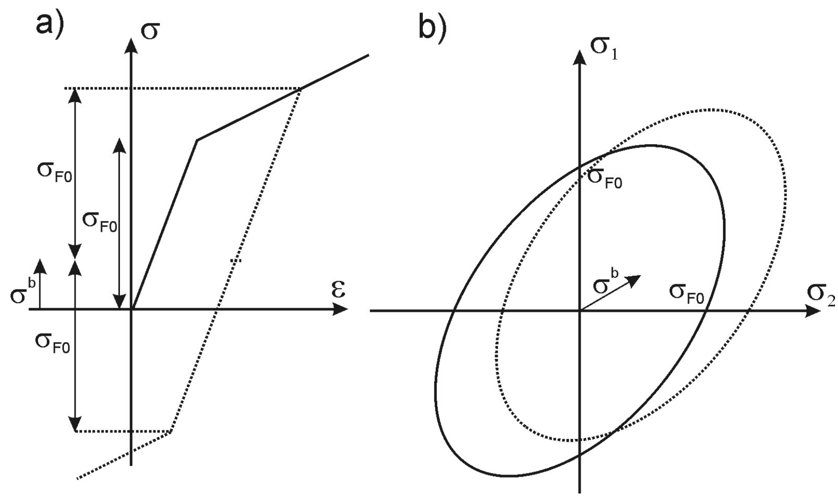

Abbildung 2.9: Kinematische Verfestigung: a) einaxial, b) Veränderung der Fließfläche für biaxiale Spannungszustände

Die Fließfunktion für kinematisch verfestigende Materialien hat die Form

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}^b) = F(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^b) - h = F(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) - h \tag{2.40}$$

Für die kinematische Verfestigung ist der Grenzwert eine konstante Fließspannung ($h = konstant$), dafür wird mit einer neu eingeführten Spannung $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ (Gleichung 2.41) gerechnet, welche die Verschiebung der Fließfläche berücksichtigt.

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^b \tag{2.41}$$

$\boldsymbol{\sigma}^b$ steht dabei für den sogenannten „Backstress“-Tensor, der die Verschiebung des Mittelpunktes der Fließfläche beschreibt. Der „Backstress“ ist eine Funktion der plastischen Verzerrung $\boldsymbol{\epsilon}^p$, und wird in Abhängigkeit vom Verfestigungsgesetz definiert.

Die Konsistenzbedingung nach Abschnitt 2.4 lässt sich für die kinematische Verfestigung ($f = f(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\sigma}^b)$) folgendermaßen schreiben

$$df = \frac{\partial f}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} : d\bar{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}^b} : d\boldsymbol{\sigma}^b = 0 \tag{2.42}$$

Die einzelnen Terme der Konsistenzbedingung können wieder durch die Gleichungen 2.43 bis 2.46 ersetzt werden:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} = \frac{\partial F}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} \tag{2.43}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}^b} = -\frac{\partial F}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} \tag{2.44}$$

Die Zusammenhänge aus Gleichung 2.24 für $d\boldsymbol{\sigma}$ können analog auch für $d\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ angewendet werden.

$$d\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{D}^e : \left(d\boldsymbol{\epsilon} - d\lambda \frac{\partial f}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} \right) \tag{2.45}$$

$$d\boldsymbol{\sigma}^b = \frac{d\boldsymbol{\sigma}^b}{d\lambda} d\lambda = \boldsymbol{H}_K d\lambda \tag{2.46}$$

$d\boldsymbol{\sigma}^b$ wird hier umgeformt, um später $d\lambda$ herausheben zu können. Durch Einsetzen des Verfestigungsgesetzes (für $d\boldsymbol{\sigma}^b$) kürzt sich im Term $\frac{d\boldsymbol{\sigma}^b}{d\lambda}\, d\lambda$ heraus (siehe Abschnitt 2.7). Daher wird zur besseren Übersicht die neue Variable $\boldsymbol{H}_K$ eingeführt.

Setzt man nun die Gleichungen 2.43 bis 2.46 in die Konsistenzbedingung ein, ergibt sich durch Umformen der Lagrangesche Multiplikator zu

$$d\lambda = \frac{\frac{\partial F}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} : \boldsymbol{D}^e : d\boldsymbol{\epsilon}}{\frac{\partial F}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} : \boldsymbol{D}^e : \frac{\partial F}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} + \frac{\partial F}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} : \boldsymbol{H}_K} \tag{2.47}$$

Damit kann aus Gleichung 2.29 der elasto-plastische Material-Steifigkeitstensor für die kinematische Verfestigung errechnet werden.

$$\boldsymbol{D}^{ep} = \boldsymbol{D}^e - \frac{\boldsymbol{D}^e : \frac{\partial F}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} \otimes \frac{\partial F}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} : \boldsymbol{D}^e}{\frac{\partial F}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} : \boldsymbol{D}^e : \frac{\partial F}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} + \frac{\partial F}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} : \boldsymbol{H}_K} \tag{2.48}$$

Im Nenner ist nun ein zusätzlicher Term ($\frac{\partial F}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} : \boldsymbol{H}_K$), der den Einfluss der kinematischen Verfestigung berücksichtigt (zum Vergleich siehe Gleichungen 2.30 und 2.39).

2.6.3 Gemischte Verfestigung

Bei der gemischten Verfestigung werden die isotrope und die kinematische Verfestigung kombiniert. Die Vorgehensweise ist analog zu den beiden vorherigen Abschnitten. Die Fließfunktion hat nun die Form:

$$f\left(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}^b, \kappa\right) = F\left(\bar{\boldsymbol{\sigma}}\right) - h\left(\kappa\right) \tag{2.49}$$

wobei $h\left(\kappa\right)$ die isotrope Verfestigung repräsentiert und $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ den Einfluss der kinematischen Verfestigung enthält.

Die Konsistenzbedingung wird erweitert zu

$$df = \frac{\partial f}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} : d\bar{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}^b} : d\boldsymbol{\sigma}^b + \frac{\partial f}{\partial \kappa} : d\kappa = 0 \tag{2.50}$$

Der Lagrangesche Multiplikator ergibt sich dann zu

$$d\lambda = \frac{\frac{\partial F}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} : \boldsymbol{D}^e : d\boldsymbol{\epsilon}}{\frac{\partial F}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} : \boldsymbol{D}^e : \frac{\partial F}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} + \frac{\partial F}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} : \boldsymbol{H}_K + \frac{\partial h(\kappa)}{\partial \kappa} \sqrt{\frac{2}{3}} \left\| \frac{\partial F}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} \right\|} \tag{2.51}$$

und der elasto-plastische Material-Steifigkeitstensor für die gemischte Verfestigung kann wie folgt geschrieben werden.

$$\boldsymbol{D}^{ep} = \boldsymbol{D}^{e} - \frac{\boldsymbol{D}^{e} : \frac{\partial F}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} \otimes \frac{\partial F}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} : \boldsymbol{D}^{e}}{\frac{\partial F}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} : \boldsymbol{D}^{e} : \frac{\partial F}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} + \frac{\partial F}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} : \boldsymbol{H}_K + \frac{\partial h(\kappa)}{\partial \kappa} \sqrt{\frac{2}{3}} \left\| \frac{\partial F}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} \right\|} \tag{2.52}$$

2.7 Spezielle Verfestigungsgesetze

In den vorangegangenen Abschnitten wurde der elasto-plastische Material-Steifigkeitstensor für die verschiedenen Verfestigungsarten allgemein hergeleitet. Daraus ist nun ersichtlich, dass zur expliziten Berechnung des isotropen Terms $\frac{\partial h(\kappa)}{\partial \kappa}$ und des kinematischen Terms $\boldsymbol{H}_K$ spezielle Verfestigungsgesetze gefunden werden müssen.

2.7.1 Isotrope Verfestigungsgesetze

Dazu wird der Grenzwert h in zwei Teile geteilt, in die konstante Anfangsfließgrenze σ_{F0} und in einen veränderlichen Anteil, der isotropen Funktion R:

$$h(\kappa) = \sigma_{F0} + R(\kappa) \tag{2.53}$$

Die Entwicklung der isotropen Verfestigung wird durch die Evolution der isotropen Funktion R beschrieben. R ist im Falle der „Verzerrungs-Verfestigung“ eine Funktion des effektiven plastischen Verzerrungs-Inkrements $d\bar{\epsilon}^p$, die Verfestigungsvariable ist dann $\kappa = \bar{\epsilon}^p$.

Lineare isotrope Verfestigung

Der einfachste Fall ist die lineare isotrope Verfestigung. Der Grenzwert $h(\kappa)$, ab dem das Fließen eintritt, vergrößert sich linear zu den plastischen Verzerrungen.

$$R(\kappa) = h_{iso} \cdot \kappa \tag{2.54}$$

Dabei ist h_{iso} eine Materialkonstante, die aus Versuchen ermittelt werden muss. Der Term $\frac{\partial h(\kappa)}{\partial \kappa}$, der zur Berechnung des elasto-plastischen Material-Steifigkeitstensors (Gleichung 2.52) erforderlich ist, kann hier einfach durch Ableiten der isotropen Funktion R nach κ ermittelt werden.

$$\frac{\partial h(\kappa)}{\partial \kappa} = \frac{\partial R(\kappa)}{\partial \kappa} = h_{iso} \tag{2.55}$$

Das Spannungs-Dehnungs-Diagramm unter anwachsender zyklischer Beanspruchung, bei linearer isotroper Verfestigung, ist in Abbildung 2.10 dargestellt.

Man sieht, dass der Grenzwert (die Fließspannung) mit jedem Belastungszyklus weiter zunimmt. Der elastische Bereich weitet sich immer mehr auf.

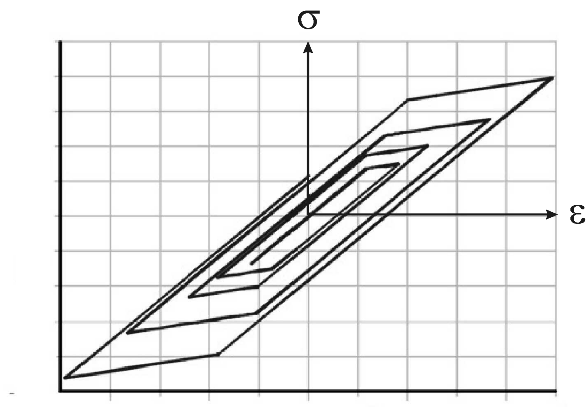

Abbildung 2.10: Lineare isotrope Verfestigung

Nichtlineare isotrope Verfestigung

In der Literatur sind einige nichtlineare isotrope Verfestigungsgesetze zu finden. Diese Gesetze können, wie bei der linearen isotropen Verfestigung, durch die Ableitung der isotropen Funktion R nach der Verfestigungsvariable κ in das Stoffgesetz (bzw. in den Lagrangeschen Multiplikator) eingesetzt werden. Hier wurde für die weiteren Berechnungen eine exponentielle Verfestigungsfunktion gewählt (siehe [7]).

$$R(\kappa) = D_\alpha \left(1 - exp\left(-\beta\kappa\right)\right) \tag{2.56}$$

D_α und β sind hier die Materialkonstanten. Der Term $\frac{\partial h(\kappa)}{\partial \kappa}$ ergibt sich zu:

$$\frac{\partial h(\kappa)}{\partial \kappa} = \frac{\partial R(\kappa)}{\partial \kappa} = \beta D_\alpha exp\left(-\beta\kappa\right) \tag{2.57}$$

In Abbildung 2.11 ist die Auswirkung der exponentiellen isotropen Verfestigung, unter anwachsender zyklischer Beanspruchung, im Spannungs-Dehnungs-Diagramm dargestellt.

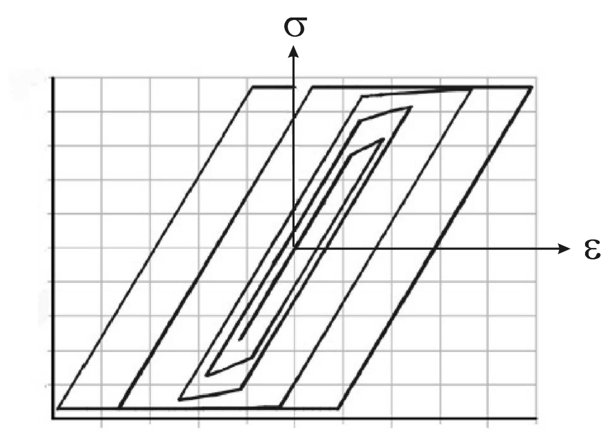

Abbildung 2.11: Nichtlineare isotrope Verfestigung

Der Grenzwert bzw. die Fließspannung nimmt auch hier mit jedem Belastungszyklus zu (wie bei der linearen isotropen Verfestigung). Aber der Anstieg der Verfestigung ist nicht konstant, bei zunehmender Belastung flacht die Kurve ab.

2.7.2 Kinematische Verfestigungsgesetze

Die Entwicklung der kinematischen Verfestigung wird durch die Evolution des „Backstress“ $\boldsymbol{\sigma}^b$ beschrieben. Es muss also eine Funktion für das „Backstress“ Inkrement $d\boldsymbol{\sigma}^b$ gefunden werden.

Lineare kinematische Verfestigung

Das lineare Verfestigungsgesetz zur Beschreibung der Evolution des „Backstress“ ist die einfachste Form der kinematischen Verfestigung. Es wurde erstmals von Melan (1938) vorgeschlagen und es wurde dann von Prager (1955, 1956) weiterverwendet. Im Folgenden wird es deshalb das „Melan-Prager Verfestigungsgesetz“ genannt. Der inkrementelle „Backstress“-Zuwachs ist gegeben mit

$$d\boldsymbol{\sigma}^b = h_{kin} d\boldsymbol{\epsilon}^p \tag{2.58}$$

h_{kin} ist dabei die Materialkonstante. Durch Einsetzen der Fließregel kann geschrieben werden:

$$d\boldsymbol{\sigma}^b = h_{kin} \frac{\partial F}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} d\lambda \tag{2.59}$$

Die Variable $\boldsymbol{H}_K$ aus Gleichung 2.46 ergibt sich hier zu

$$\boldsymbol{H}_K = \frac{d\boldsymbol{\sigma}^b}{d\lambda} = h_{kin} \frac{\partial F}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} \tag{2.60}$$

Das Spannungs-Dehnungs-Diagramm unter anwachsender zyklischer Beanspruchung ist in Abbildung 2.12 dargestellt.

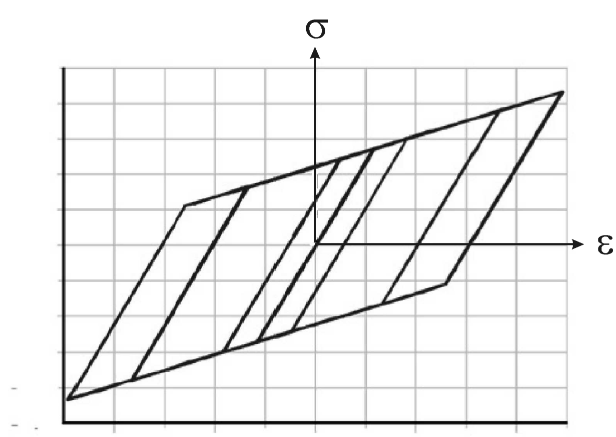

Abbildung 2.12: Lineare kinematische Verfestigung

Hier sieht man, dass durch die lineare kinematische Verfestigung der elastische Bereich nicht aufgeweitet wird, wie in der isotropen Verfestigung. Die Grenzwerte verschieben sich hier, der Abstand (der elastische Bereich) bleibt gleich.

Nichtlineare kinematische Verfestigung

Eine gut geeignete und oft verwendete Form der nichtlinearen Verfestigung ist die „Armstrong-Frederick Verfestigung“ (1966). Die Evolution des „Backstress“ wird hier durch folgende Differentialgleichung beschrieben:

$$d\boldsymbol{\sigma}^b = C d\boldsymbol{\epsilon}^p - \gamma d\kappa \boldsymbol{\sigma}^b \tag{2.61}$$

Hierbei sind C und γ die Materialkonstanten. Setzt man für $d\boldsymbol{\epsilon}^p$ die Fließregel ein, bekommt man:

$$d\boldsymbol{\sigma}^b = C \frac{\partial F}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} d\lambda - \gamma \sqrt{\frac{2}{3}} \left\| \frac{\partial F}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} \right\| d\lambda \boldsymbol{\sigma}^b \tag{2.62}$$

$\boldsymbol{H}_K$ kann dann folgendermaßen berechnet werden:

$$\boldsymbol{H}_K = \frac{d\boldsymbol{\sigma}^b}{d\lambda} = C \frac{\partial F}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} - \gamma \sqrt{\frac{2}{3}} \left\| \frac{\partial F}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} \right\| \boldsymbol{\sigma}^b \tag{2.63}$$

Die Auswirkung der Armstrong-Frederick Verfestigung auf das Spannungs-Dehnungs-Verhalten, bei konstanter zyklischer Beanspruchung, ist in Abbildung 2.13 abgebildet.

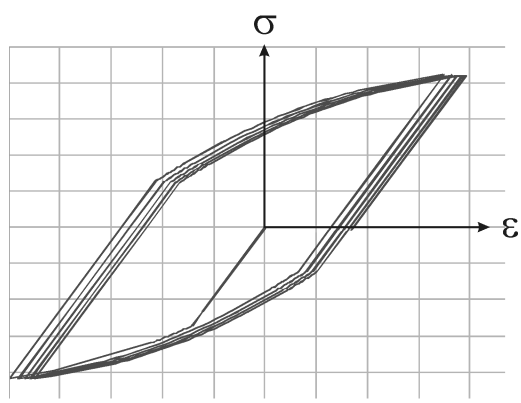

Abbildung 2.13: Nichtlineare kinematische Verfestigung

Der Effekt der nichtlinearen kinematischen Verfestigung wird „ratcheting“-Effekt genannt, oder auch zyklisches Kriechen. Bei konstant bleibender zyklischer Beanspruchung verschiebt sich die Hysteresisschleife (sie kriecht).

Es gibt auch noch einige andere nichtlineare kinematische Verfestigungsgesetze. Oft sind es Erweiterungen der „Armstrong-Frederick Verfestigung“, z.B. nach Chaboche (1991) oder nach Ohno und Wang (1993), hier wird ein zusätzlicher Term eingeführt, der einen weiteren Effekt berücksichtigt (ein geringfügiges Öffnen der hysteresis Schleifen) (siehe [12]).

2.7.3 Gemischte nichtlineare Verfestigung

Mit der Kombination aus der exponentiellen isotropen Verfestigung und der Armstrong-Frederick Verfestigung kann unter anwachsender zyklischer Beanspruchung das Spannungs-Dehnungs Verhalten wie in Abbildung 2.14 simuliert werden.

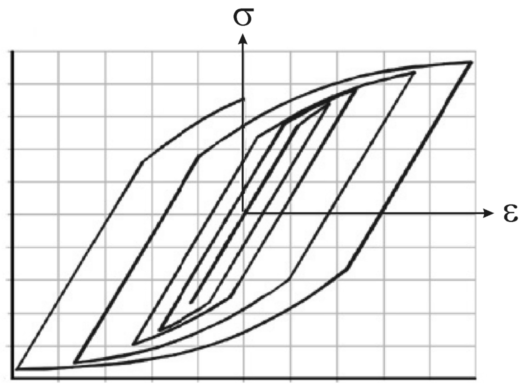

Abbildung 2.14: Gemischte nichtlineare Verfestigung

Dabei gibt es dann insgesamt 6 freie Materialparameter: β, D_α, γ, C für die Verfestigungsgesetze, σ_{F0} (die Anfangsfließgrenze) und $\boldsymbol{D}^e$ (die Steifigkeit im elastischen Bereich), die aus Versuchsdaten für ein konkretes Material bestimmt werden müssen.

3 Konstitutives Modell des 1D Systems

3.1 Allgemeines

Ziel dieser Arbeit ist es, das elasto-plastische Verhalten von partiell-resistenten Verbindungen in Stabwerken simulieren zu können. Nach der Herleitung der konstitutiven Gleichungen für das allgemeine drei-dimensionale Kontinuum können diese nun für das ein-dimensionale Problem vereinfacht werden (siehe [6]).

Dazu werden die Spannungen in Kraftgrößen übergeführt, und die Verzerrungen in Weggrößen.

3.1.1 Kraftgrößen

Der Spannungszustand eines Stabelementes kann auch in der nächst höheren Integrationsebene ausgedrückt werden. Durch Integration der Spannungen über den Querschnitt (siehe Abbildung 3.1) erhält man die Spannungsresultierenden, es handelt sich dabei um Schnittgrößen.

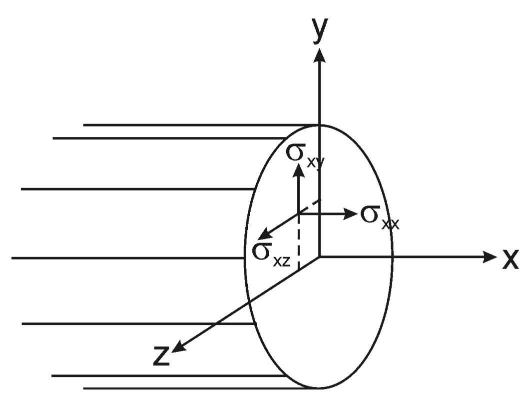

Abbildung 3.1: Querschnitt eines Stabelements

$$N = \int_{(A)} \sigma_{xx} dA \tag{3.1}$$

$$S_y = \int_{(A)} \sigma_{xy} dA \tag{3.2}$$

$$S_z = \int_{(A)} \sigma_{xz} dA \tag{3.3}$$

$$M_y = \int_{(A)} \sigma_{xx} z dA \tag{3.4}$$

$$M_z = \int_{(A)} \sigma_{xx} y dA \tag{3.5}$$

$$T = \int_{(A)} \left(y\sigma_{xz} - z\sigma_{xy}\right) dA \tag{3.6}$$

Diese Kräfte sind die Elemente des Kraftgrößenvektors $Q_i\,(Q_1, Q_2 \ldots Q_n)$. Für den allgemeinen Fall gilt:

$$Q_6 = (N, S_y, S_z, M_y, M_z, T)^T \tag{3.7}$$

3.1.2 Weggrößen

Der Verzerrungszustand eines Stabelements kann über die Weggrößen q_i charakterisiert werden. Die Elemente des Weggrößenvektors sind die Relativverformungen zwischen den Elementenden (Abbildung 3.2). Es wird hier von der Bernoulli Hypothese ausgegangen.

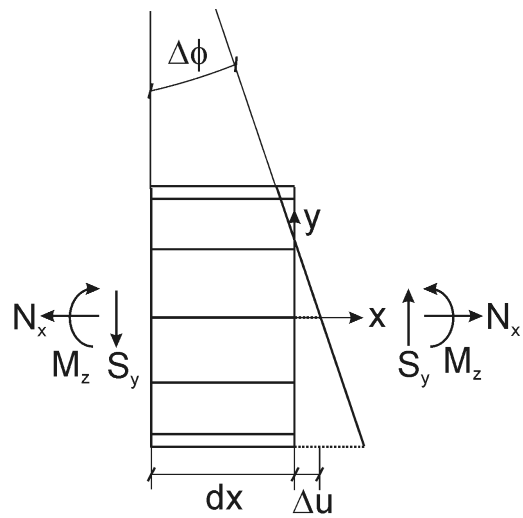

Abbildung 3.2: Weggrößen, Relativverschiebungen

Dabei sind Δu und $\Delta\phi$ die Relativverformungen. Aus deren Ableitungen erhält man die Verzerrungen $\epsilon = \frac{d\Delta u}{dx}$ und $\kappa = \frac{d\Delta\phi}{dx}$. Im weiterem wird für die Relativverformungen nur noch U bzw. Φ statt Δu bzw. $\Delta\phi$ geschrieben, da die inkrementelle Form ($d\Delta u$ bzw. $d\Delta\phi$) sonst verwirren würde.

3.1.3 Reduzierter Raum

Im Folgenden wird noch eine weitere Vereinfachung vorgenommen. In vielen Fällen können der Kraftgrößenvektor Q_6 und der Weggrößenvektor q_6 reduziert werden ($Q_{(i<6)}$ und $q_{(i<6)}$).

Dabei werden nur noch die Kraftgrößen berücksichtigt, welche eine spezifische Verzerrungsenergie W erzeugen. Das Skalarprodukt von Q_i und q_i ergibt die spezifische Verzerrungsenergie W des Elementes.

$$W = Q_i q_i = Q_1 q_1 + Q_2 q_2 + \ldots Q_n q_n \tag{3.8}$$

Wenn z.B. gewisse Relativverformungen vernachlässigbar klein sind, dann verschwinden auch deren Anteil an der spezifischen Verformungsenergie, und daher müssen diese Anteile auch im Kraftgrößenvektor nicht berücksichtigt werden. So ergibt sich ein reduzierter n-dimensionaler Kraftgrößenvektor.

Betrachtet man z.B. ein ebenes Stabtragwerk, fallen drei der Kraftgrößen heraus (T, M_y und S_z). Vernachlässigt man zusätzlich noch den Einfluss des Schub-Terms (S_y) auf die Fließfunktion, dann erhält man als Kraftgrößenvektor:

$$Q_2 = \begin{bmatrix} N \\ M_z \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

Der Weggrößenvektor wird hier durch die Relativverschiebung U und die Relativverdrehung Φ_z beschrieben.

$$q_2 = \begin{bmatrix} U \\ \Phi_z \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

3.2 Konstitutive Gleichungen

Analog zu den Annahmen für das drei-dimensionale Kontinuum des vorherigen Kapitels, können die Gesetzmäßigkeiten auch für das Stabelement aufgestellt werden.

Wie in Gleichung 2.3 kann die Fließfunktion auch in Abhängigkeit der Kraft- und Weggrößen formuliert werden:

$$f\left(Q_i\right) = 0 \tag{3.11}$$

Das „Postulat der maximalen plastischen Dissipation“ (siehe Abschnitt 2.3) kann auch hier wie folgt formuliert werden:

$$\mathcal{D}\left(dq_i^p\right) = Q_i dq_i^p = max \tag{3.12}$$

wobei dq_i^p das plastische Weggrößeninkrement ist.

Damit lässt sich die Fließregel folgendermaßen aufstellen, siehe Gleichung 2.17.

$$dq_i^p = d\lambda \frac{\partial F}{\partial Q_i} \tag{3.13}$$

$d\lambda$ ist dabei der unbekannte Lagrangesche Multiplikator.

Das Weggrößeninkrement kann wieder in einen elastischen dq_i^e und in einen plastischen Anteil dq_i^p zerlegt werden (Vergleiche mit Gleichung 2.18):

$$dq_i = dq_i^e + dq_i^p \tag{3.14}$$

Die Konsistenzbedingung (siehe auch Gleichung 2.23) ist dann:

$$df = \frac{\partial f}{\partial Q_i} dQ_i = 0 \tag{3.15}$$

dabei ist dQ_i das Kraftgrößeninkrement.

Damit können wie im allgemeinen Fall der Lagrangesche Multiplikator und die elasto-plastische Material-Steifigkeit berechnet werden.

3.3 Verhalten unter reiner Biegung

Im Weiteren soll das elasto-plastische Verhalten von partiell-resistenten Verbindungen in Stabtragwerken untersucht werden. Dafür wird die Stoffgleichung unter der Annahme reiner Biegung aufgestellt. Die Effekte von Normal- und Schubkräften in der Fließbedingung werden hier vernachlässigt.

Dabei reduzieren sich die Kraft- und Weggrößen auf je einen Wert M und Φ.

$$Q_i = Q_1 = M \tag{3.16}$$

$$q_i = q_1 = \Phi \tag{3.17}$$

Einsetzen in die konstitutive Gleichungen

Für diesen speziellen, stark reduzierten Fall sollen nun alle zuvor hergeleiteten theoretischen Grundlagen angewendet werden.

Unter Verwendung der Von Mises Fließfunktion (Abschnitt 2.2.2) für F, kann die Fließbedingung im allgemeinen folgendermaßen geschrieben werden:

$$f = F - h = \sqrt{3J_2} - h = 0 \tag{3.18}$$

Setzt man für die zweite Invariante J_2 die Hauptspannungen ein und geht vom einaxial beanspruchten Fall aus ($\sigma_2 = 0$ und $\sigma_3 = 0$), dann reduziert sich J_2 zu:

$$J_2 = \frac{1}{6}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right] = \frac{1}{6}\left[(\sigma_1)^2 + (-\sigma_1)^2\right] = \frac{2}{6}(\sigma_1)^2 \tag{3.19}$$

Durch Einsetzen von Gleichung 3.19 in 3.18 erhält man:

$$f = \sqrt{3J_2} - h = \sqrt{3\frac{2}{6}(\sigma_1)^2} - h = |\sigma_1| - h \tag{3.20}$$

Unter Berücksichtigung der isotropen Verfestigung ($h = h(\kappa)$, siehe Abschnitt 2.6.1) und der kinematischen Verfestigung ($\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^b$, siehe Abschnitt 2.6.2) kann die Gleichung wie folgt geschrieben werden:

$$f = |\bar{\sigma}_1| - h(\kappa) \tag{3.21}$$

Da diese Gleichung bereits nur noch von einem skalaren Spannungsterm $\bar{\sigma}_1$ abhängt, fällt es nun leicht diesen allgemeinen Ausdruck in die Kraft- und Weggrößenabhängige Form zu übertragen. Die Spannung $\bar{\sigma}_1$ wird durch die Kraftgröße $\bar{M}$ ersetzt, und die allgemeine Verfestigungsvariable κ wird hier durch eine Verfestigungsvariable K ersetzt.

$$f = \left|\bar{M}\right| - h(K) \tag{3.22}$$

Dabei gilt $\bar{M} = M - M^b$, wobei M^b der „Backstress“-Anteil für die kinematische Verfestigung ist. Die Verfestigungsvariable K kann hier analog zu Gleichung 2.32 als „effektive plastische Weggröße“ angeschrieben werden ($dK = |d\Phi^p| = d\lambda \left|\frac{\partial F}{\partial M}\right|$).

Der Lagrangesche Multiplikator $d\lambda$ der gemischten Verfestigung aus Gleichung 2.51 kann hier folgendermaßen geschrieben werden:

$$d\lambda = \frac{\frac{\partial F}{\partial \bar{M}} C_F^e d\Phi}{\frac{\partial F}{\partial \bar{M}} C_F^e \frac{\partial F}{\partial \bar{M}} + \frac{\partial F}{\partial \bar{M}} H_K + \frac{\partial h(K)}{\partial K} \left| \frac{\partial F}{\partial \bar{M}} \right|} \tag{3.23}$$

Der elastische Material-Steifigkeitstensors $\boldsymbol{D}^e$ reduziert sich in diesem Fall auf den skalaren Wert der elastischen Federsteifigkeit C_F^e. Der elasto-plastische Material-Steifigkeitstensor $\boldsymbol{D}^{ep}$ reduziert sich hier ebenfalls auf einen skalaren Wert C_F^{ep}.

$$C_F^{ep} = C_F^e - \frac{C_F^e \frac{\partial F}{\partial \bar{M}} \frac{\partial F}{\partial \bar{M}} C_F^e}{\frac{\partial F}{\partial \bar{M}} C_F^e \frac{\partial F}{\partial \bar{M}} + \frac{\partial F}{\partial \bar{M}} H_K + \frac{\partial h(K)}{\partial K} \left| \frac{\partial F}{\partial \bar{M}} \right|} \tag{3.24}$$

mit

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{M}} = sign\left(M - M^b\right) \tag{3.25}$$

($sign$ steht hier für die Signum-Funktion oder Vorzeichenfunktion), es ergibt sich die Gleichung zu:

$$C_F^{ep} = C_F^e - \frac{\left(C_F^e\right)^2}{C_F^e + H_K sign\left(M - M^b\right) + \frac{\partial h(K)}{\partial K}} \tag{3.26}$$

C_F^{ep} beschreibt die Steifigkeit im plastischen Bereich. Und die eindimensionale „Stoffgleichung“ im plastischen Bereich kann in inkrementeller Form angeschrieben werden:

$$dM = C_F^{ep} d\Phi \tag{3.27}$$

Verfestigungsgesetze

Aus dem isotropen Verfestigungsgesetz ergibt sich der Term für $\frac{\partial h(K)}{\partial K}$ und aus dem kinematischen Verfestigungsgesetz ergibt sich der Term für H_K.

- Lineare isotrope Verfestigung:

$$\frac{\partial h\left(K\right)}{\partial K} = h_{iso} \tag{3.28}$$

  h_{iso} ist der Verfestigungsparameter (Materialkonstante).

- Nichtlineare isotrope Verfestigung (Exponentialfunktion):

$$\frac{\partial h\left(K\right)}{\partial K} = \beta D_\alpha exp\left(-\beta \left|\Phi_p\right|\right) \tag{3.29}$$

  β und D_α sind hier die Verfestigungsparameter.

- Lineare kinematische Verfestigung (Melan-Prager Regel):

$$H_K = \frac{dM^b}{d\lambda} = h_{kin} \frac{\partial F}{\partial \bar{M}} = h_{kin} sign(M - M^b) \tag{3.30}$$

  h_{kin} ist dabei der Verfestigungsparameter.

- Nichtlineare kinematische Verfestigung (Armstrong und Frederick Verfestigung):

$$H_K = \frac{dM^b}{d\lambda} = C\frac{\partial F}{\partial \bar{M}} - \gamma \left| \frac{\partial F}{\partial \bar{M}} \right| M^b = Csign(M - M^b) - \gamma M^b \tag{3.31}$$

  C und γ sind hier die Verfestigungsparameter.

4 Implementierung in das FE-Programm

4.1 Allgemeines

Die im letzten Kapitel hergeleitete Stoffgleichung soll nun für die Berechnung eines ebenen Rahmentragwerks mit partiell-resistenten (platifizierenden) Verbindungen, in das Finite Elemente Programm ANSYS [1] implementiert werden. Aufgabe der Finite Elemente Analyse ist es, das Verhalten des Strukturmodells unter einer gegebenen Belastungsgeschichte zu berechnen, siehe dazu [10].

Strukturmodell

Das Strukturmodell ist in diesem Fall ein ebenes Stabtragwerk mit partiell-resistenten Verbindungen, wie in Abbildung 4.1 dargestellt.

Für die Finite Elemente Methode wird das Strukturmodell in endlich viele (finite) Elemente unterteilt. Zur Modellierung der Stützen und Balken werden hier ebene Stabelemente verwendet. Je Knoten gibt es drei Freiheitsgrade, siehe Abbildung 4.2.

Die partiell-resistenten Verbindungen werden mittels Drehfedern simuliert, die zwischen den jeweiligen Stabelementen eingeführt werden. Das Verhalten dieser Drehfedern ist durch die Federsteifigkeit C_F definiert, siehe Abbildung 4.2.

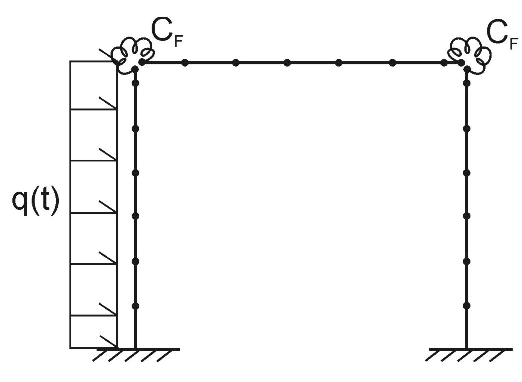

Abbildung 4.1: Schema eines Strukturmodells

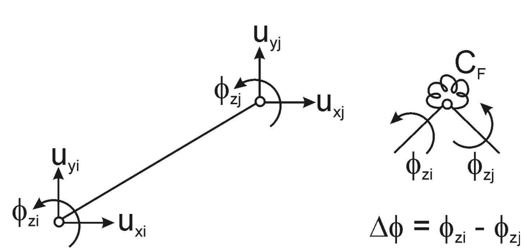

Abbildung 4.2: links: Stabelement, rechts: Federelement

Es wird angenommen, dass die Stabelemente unter der aufgebrachten Belastung immer im elastischen Bereich bleiben. Während die partiell-resistenten Verbindugen auch plastifizieren können. Das bedeutet, dass die Nichtlinearität nur auf die Verbindung C_F zutrifft.

Belastungsgeschichte

Das Verhalten des Strukturmodells soll unter zyklischer Beanspruchung simuliert werden. Dazu wird die Belastungsgeschichte über die „pseudo Zeit“ t aufgetragen und in mehrere Lastschritte (Δt) unterteilt, siehe Abbildung 4.3.

Unter der Annahme, dass dynamische Effekte nicht berücksichtigt werden müssen, wird die Berechnung „quasi statisch“ durchgeführt (das bedeutet, dass Massenkräfte nicht berücksichtigt werden).

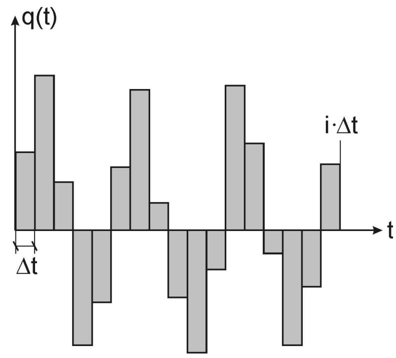

Abbildung 4.3: Schema einer Belastungsgeschichte

4.2 Nichtlineare Probleme

Es soll das Systemverhalten unter einer gegebenen zyklischen Belastungsgeschichte berechnet werden. Wie bereits beschrieben, wird die Last dazu in Lastschritte unterteilt. Je Lastschritt Δt wird die Systemantwort berechnet und zu den Gesamtergebnissen $t + \Delta t$ addiert.

Die Systemantwort des jeweiligen Lastschrittes, wird durch das Lösen der Gleichung 4.1 ermittelt.

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{u} \tag{4.1}$$

Bei elastischem Materialverhalten, ist die Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}$ konstant, die Verformungen $\boldsymbol{u}$ sind linear von der Belastung $\boldsymbol{f}$ abhängig.

Bei elasto-plastischem Materialverhalten ist die konstitutive Beziehung (die Stoffgleichung) nichtlinear. Damit ist auch die Gleichung 4.1 der FE Analyse nichtlinear. Die Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}$ ist von den Knoten-Verschiebungen $\boldsymbol{u}$ abhängig.

Je Lastschritt (zur Zeit t) müssen die Knoten-Verschiebungen $\boldsymbol{u}$ gefunden werden (und die zugehörige Steifigkeit $\boldsymbol{K}$), so dass die Gleichung 4.1 erfüllt ist. Dieses Gleichgewicht kann bei elasto-plastischem Verhalten nicht auf direkten Weg ermittelt werden, es sind iterative Lösungsverfahren erforderlich.

In dieser Arbeit werden nur die dafür vorgesehenen parteill-resistenten Verbindungen in ihrem Verdrehungsfreiheitsgrad plastisch, überall sonst bleibt der Zustand elastisch. Daher ist das gesamte Iterationsverfahren auf den Verdrehungsfreiheitsgrad der partiell-resistenten Verbindung reduziert. Im Weiteren kann daher von der Gleichung 4.2 ausgegangen werden.

$$M = C_F \Phi \tag{4.2}$$

C_F ist dabei die veränderliche Federsteifigkeit.

4.2.1 Allgemeine Vorgehensweise

Es wird angenommen, dass die Lösung des vorherigen Lastschrittes zur Zeit t bekannt ist, während die Lösung zur Zeit $t + \Delta t$ gesucht wird.

Die Belastung des aktuellen Lastschrittes wird auf das System aufgebracht. Daraus wird die Relativverdrehung $\Delta\Phi_0$ berechnet. Die inneren Schnittgrößen (hier das Moment) $\Delta M_{ext\,0}$ zufolge der äußeren Belastung können berechnet werden.

$$\Delta M_{ext\,0} = {}^{t} C_F \, \Delta\Phi_0 \tag{4.3}$$

$${}^{t+\Delta t}M_{ext\,0} = {}^{t} M_{ext} + \Delta M_{ext\,0} \tag{4.4}$$

$${}^{t+\Delta t}\Phi_0 = {}^{t} \Phi + \Delta\Phi_0 \tag{4.5}$$

Mit der berechneten Relativverdrehung ${}^{t+\Delta t}\Phi_0$ können das innere Moment ${}^{t+\Delta t}M_{int\,0}$ und die zugehörige elasto-plastische Federsteifigkeit ${}^{t+\Delta t}C_{F\,0}$ aus der konstitutiven Beziehung rückgerechnet werden.

$${}^{t+\Delta t}\Phi_0 \;\rightarrow\; {}^{t+\Delta t}M_{int\,0} \;\rightarrow\; {}^{t+\Delta t}C_{F\,0} \tag{4.6}$$

Im Ablaufdiagramm (Abbildung 4.5) geschieht das unter den Punkten „Rückrechnung des inneren Moments aus der Stoffgleichung“ (Abschnitt 4.2.3) und „Aktualisieren der konstitutiven Gleichung“ (Abschnitt 4.2.4).

Die Schnittgrößen, die durch die äußere Belastung erzeugt werden (${}^{t+\Delta t}M_{ext\,0}$), sollten mit denen, die zufolge der Relativverdrehungen auftreten (${}^{t+\Delta t}M_{int\,0}$), übereinstimmen, siehe Gleichung 4.7.

$${}^{t+\Delta t}M_{ext} = {}^{t+\Delta t} M_{int} \tag{4.7}$$

Befindet sich der Zustand im plastischen (nichtlinearen) Bereich, ist diese Bedingung nicht erfüllt, es kommt zu einem Fehler, siehe Abbildung 4.4.

$$\Delta M_0 = {}^{t+\Delta t} M_{ext\,0} - {}^{t+\Delta t} M_{int\,0} \tag{4.8}$$

Nun muss ein iteratives Verfahren verwendet werden, um zum Schluss (im i-ten Iterationsschritt) auf eine Lösung zu kommen, in der das Gleichgewicht ${}^{t+\Delta t}M_{ext\,i} = {}^{t+\Delta t} M_{int\,i}$ erfüllt ist und der Fehler verschwindet $\Delta M_i \approx 0$. Zur Durchführung der Iteration gibt es unterschiedliche Lösungsverfahren, z.B. die Newton-Raphson Iteration oder die modifizierte Newton Raphson Iteration (siehe Abschnitt 4.2.2).

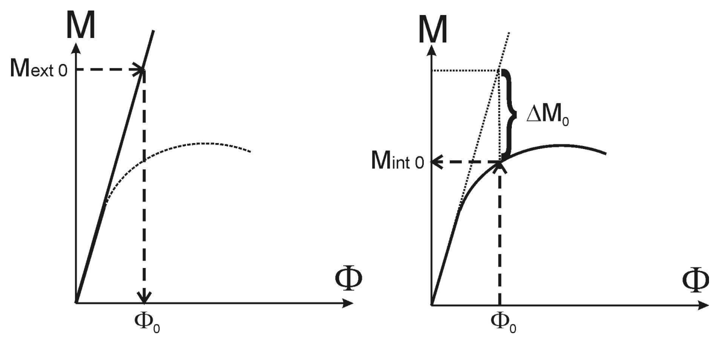

Abbildung 4.4: „Residualmoment“ ΔM_0 (differenz zwischen den Schnittgrößen)

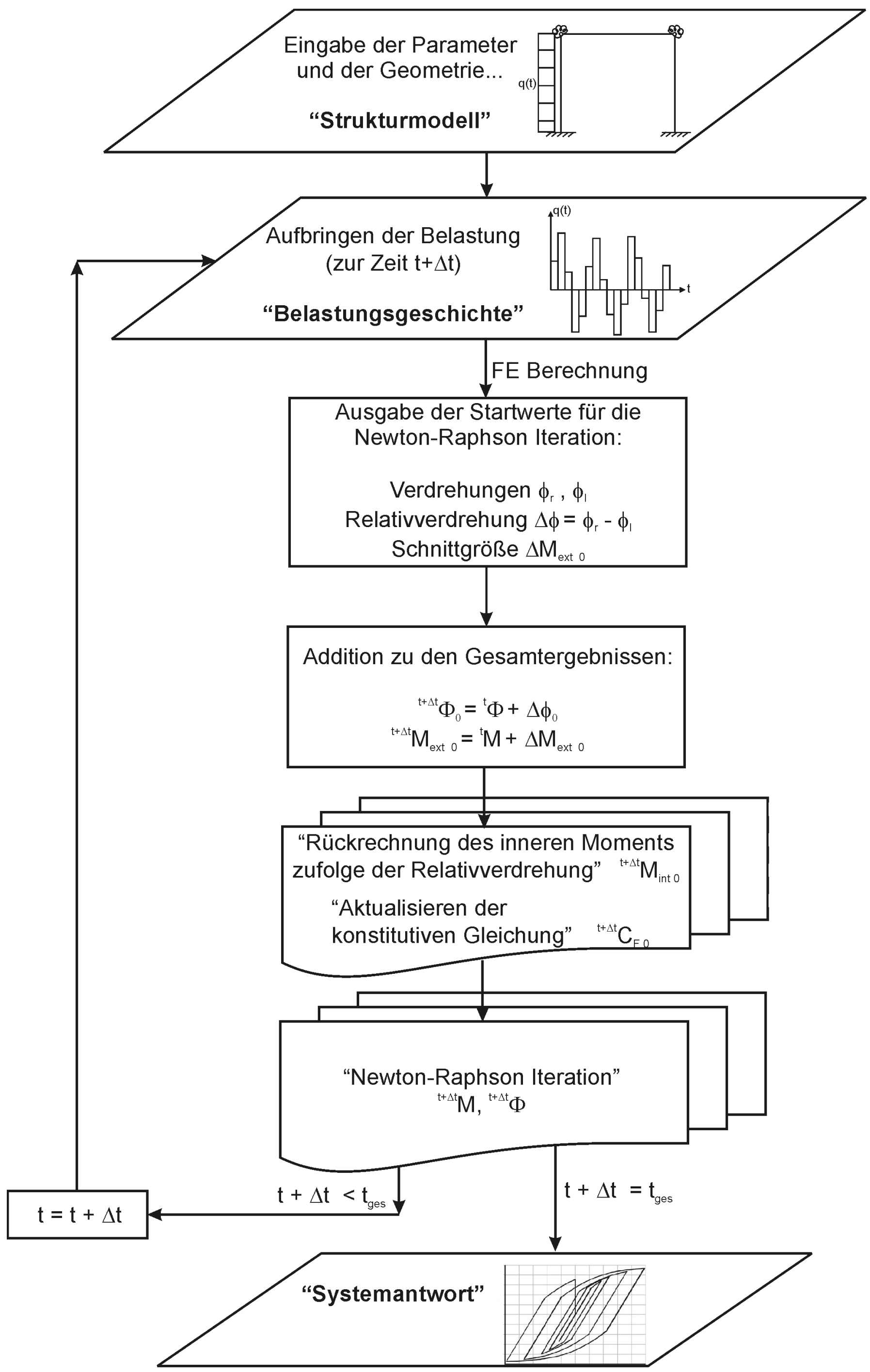

Abbildung 4.5: Ablaufdiagramm des gesamten Algorithmus

Der allgemeine Ablauf ist in Abbildung 4.5 ersichtlich. Die verwendeten Algorithmen „Rückrechnung des inneren Moments aus der Stoffgleichung“, „Aktualisieren der konstitutiven Gleichung“ und „Newton-Raphson Iteration“ werden in den folgenden Abschnitten beschrieben.

4.2.2 Newton-Raphson Iteration

Die Iteration wird hier mit Hilfe des Newton-Raphson Verfahrens durchgeführt, siehe Abbildung 4.7. Dafür wird der neue Index i für den i-ten Iterationsschritt eingeführt.

Dabei wird das „Residualmoment“ ΔM_{i-1} als Belastung auf das System (mit der aktuellen Federsteifigkeit ${}^{t+\Delta t}C_{F\,i-1}$) aufgeracht. Und zwar links und rechts des jeweiligen Freiheitsgrades, mit entgegengesetzten Vorzeichen Abbildung 4.6.

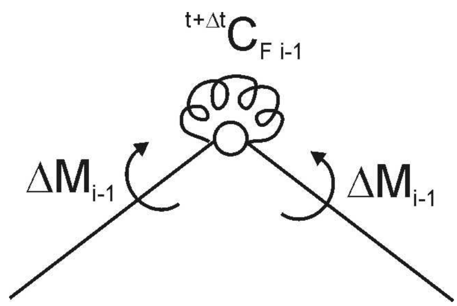

Abbildung 4.6: Aufbringen des „Residualmoments“

Dadurch entstehen keine zusätzlichen Auflagerkräfte, sondern nur Schnittgrößen und Weggrößen. Hier interessieren wieder nur die inneren Momente zufolge der Belastung $\Delta M_{ext\,i}$ und Relativverdrehungen $\Delta\Phi_i$. Diese werden zu den vorherigen Ergebnissen addiert:

$$ {}^{t+\Delta t}M_{ext\,i} = {}^{t+\Delta t}M_{ext\,i-1} + \Delta M_{ext\,i} \tag{4.9} $$

$$ {}^{t+\Delta t}\Phi_i = {}^{t+\Delta t}\Phi_{i-1} + \Delta\Phi_i \tag{4.10} $$

Aus der nichtlinearen Stoffgleichung können die inneren Momente ${}^{t+\Delta t}M_{int\,i}$ zufolge der Relativverdrehungen ${}^{t+\Delta t}\Phi_i$ ermittelt werden (siehe „Rückrechnung des inneren Moments aus der Stoffgleichung“, Abschnitt 4.2.3). Die dazugehörige elasto-plastische Federsteifigkeit ${}^{t+\Delta t}C_{F\,i}$ wird jeweils mitaktualisiert (siehe „Aktualisieren der konstitutiven Gleichung“, Abschnitt 4.2.4).

$$ {}^{t+\Delta t}\Phi_i \;\rightarrow\; {}^{t+\Delta t}M_{int\,i} \;\rightarrow\; {}^{t+\Delta t}C_{F\,i} \tag{4.11} $$

Damit kann ein neues „Residualmoment“ errechnet werden:

$$ \Delta M_i = {}^{t+\Delta t}M_{ext\,i} - {}^{t+\Delta t}M_{int\,i} \tag{4.12} $$

Die Iterationsprozedur wird so lange durchlaufen bis die Gleichung ${}^{t+\Delta t}M_{ext} \approx {}^{t+\Delta t}M_{int}$ erfüllt ist, siehe Abbildung 4.7. Der Fehler soll verschwinden, dafür wird hier folgende Abbruchbdingung eingeführt:

$$ \Delta M_i \approx 0 \;\rightarrow\; |\Delta M_i| < \mathit{Abbruchbedingung} \tag{4.13} $$

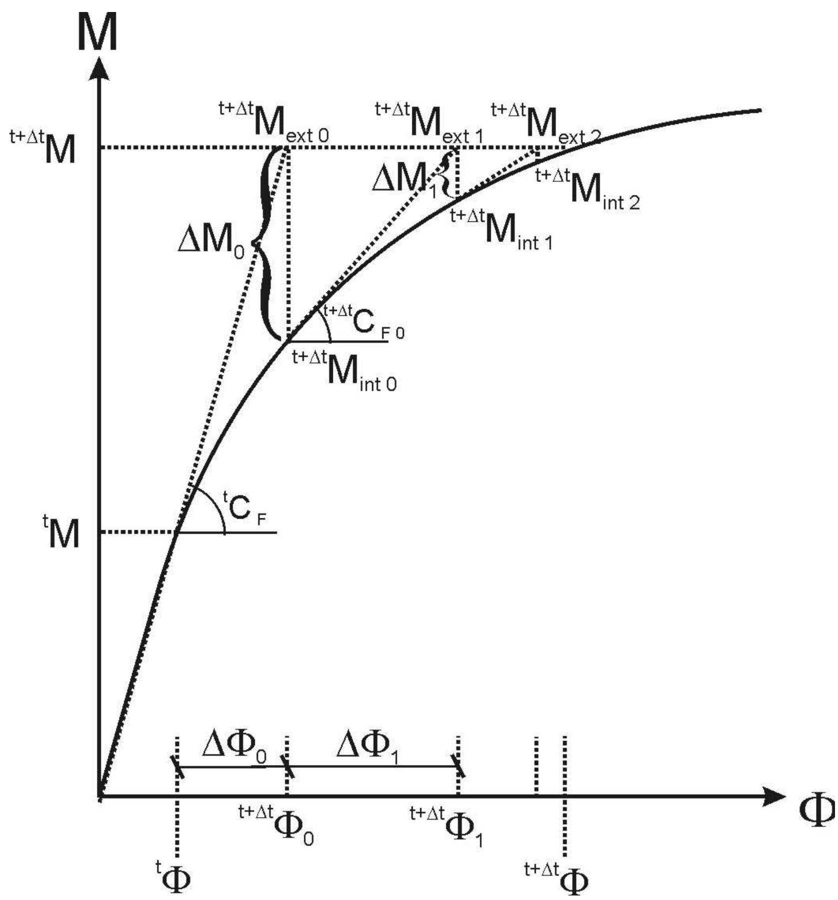

Abbildung 4.7: Newton-Raphson Verfahren

Im Falle, dass das System nicht konvergiert (z.B. bei der Wahl zu großer Lastschritte) wird die Berechnung nach einem vordefinierten maximalen Iterationsdurchlauf beendet. Hier wurde die maximale Anzahl an Iterationsschritten auf $i_{max} = 10$ gesetzt da das System, wenn es konvergiert, im Allgemeinen schnell konvergiert.

Das Ablaufdiagramm der Newton-Raphson Iteration ist in Abbildung 4.8 ersichtlich. Die Iteration beginnt dabei mit dem Startwert ΔM_0, der im vorherigen Abschnitt ermittelt wurde.

Am Ende der Berechnung erhält man die Lösung für diesen Zeitschritt $t + \Delta t$: das Moment ${}^{t+\Delta t}M$, die Relativverdrehung ${}^{t+\Delta t}\Phi$ und die Federsteifigkeit ${}^{t+\Delta t}C_F$.

Modifizierte Newton-Raphson Iteration

Beim „modifizierten Newton-Raphson Verfahren“ wird analog zum „Newton-Raphson Verfahren“ vorgegangen, mit dem einzigen Unterschied, dass hier die Federsteifigkeit C_F während der Iteration nur alle n Schritte aktualisiert wird oder überhaupt konstant bleibt. Dadurch braucht der Schritt „Aktualisieren der konstitutiven Gleichungen“ nicht gemacht werden, aber das System konvergiert deutlich langsamer als das Newton-Raphson Verfahren (siehe den Vergleich bei der Kontrollrechnung in Abschnitt 4.3).

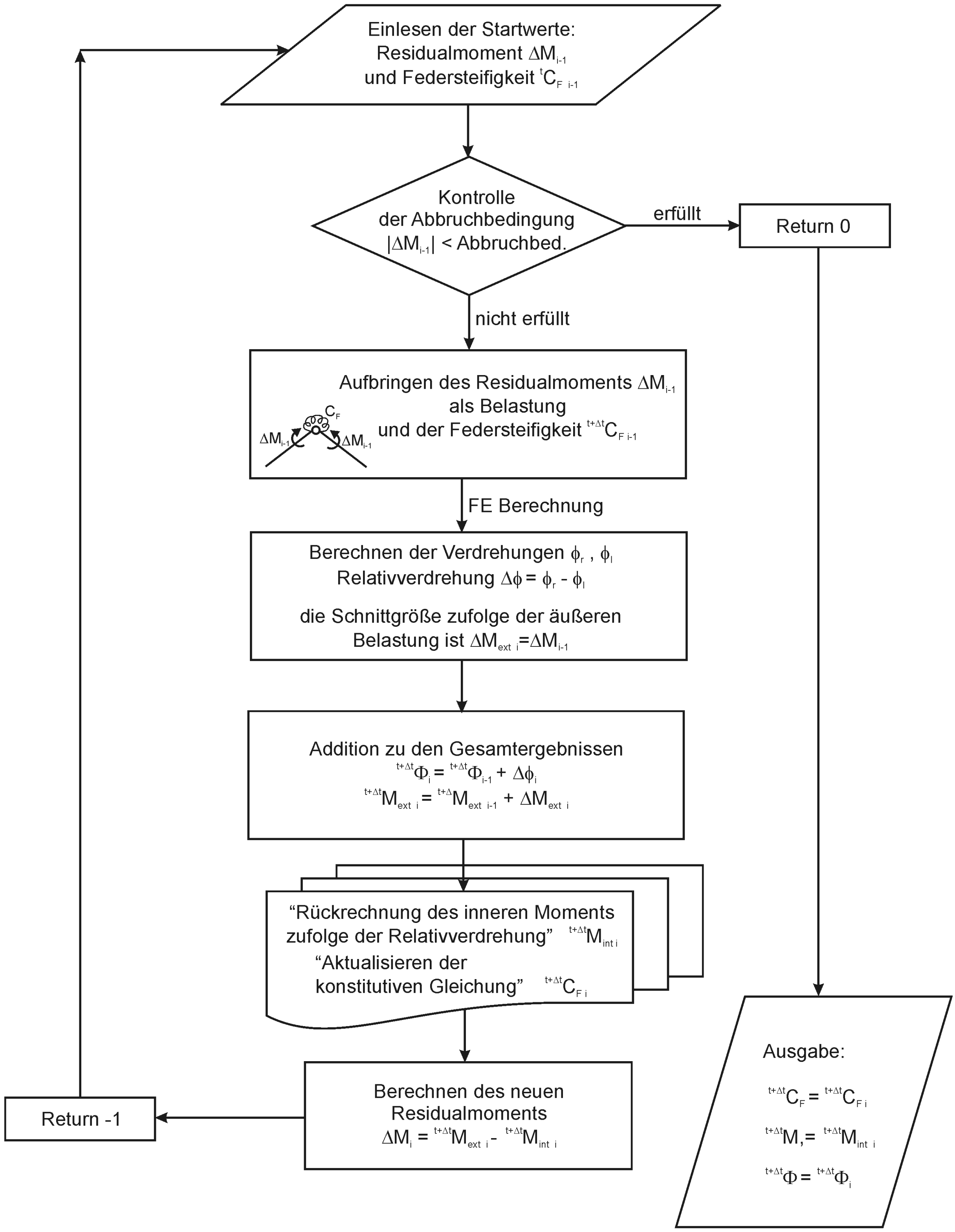

Abbildung 4.8: Ablaufdiagramm der Newton-Raphson Iteration

4.2.3 Rückrechnung des inneren Moments zufolge der Relativverdrehung

Innerhalb eines Iterationsschrittes im Newton-Raphson Verfahren soll das innere Moment M_{int} zufolge einer Relativverdrehung Φ rückgerechnet werden.

Der Anfangszustand ist gegeben mit: Φ_{i-1}, $M_{int\,i-1}$ und $C_{F\,i-1}$. Der neue Verzerrungszustand Φ_i ist auch bekannt und das innere Moment $M_{int\,i}$ soll aus der nichtlinearen Stoffgleichung rückgerechnet werden.

Zunächst muss überprüft werden, ob sich der Zustand im elastischen oder im plastischen Bereich befindet. Dazu wird die Fließbedingung berechnet, im Ablaufdiagramm (Abbildung 4.10) erfolgt das durch Aufrufen der Funktion „Fließbedingung“.

Dabei gibt es verschiedene Möglichkeiten, siehe Tabelle 4.1).

$f_i \leq 0$			elastischer Bereich
$f_i > 0$	$f_{i-1} < 0$	$r \neq 0$	Übergang elastisch-plastisch
$f_i > 0$	$f_{i-1} = 0$	$r = 0$	plastischer Bereich

Tabelle 4.1: Fließbedingung

Im elastischen Bereich ist die Stoffgleichung linear. Der elastische Materialsteifigkeitstensor $\boldsymbol{D}^e$ (in diesem Fall der skalare Wert C_F^e) ist konstant. Das innere Moment $M_{int\,i}$ kann also direkt aus dem elastischen Stoffgesetz berechnet werden:

$$M_{int\,i} = C_F^e\,\Phi_i \tag{4.14}$$

Diese Beziehung gilt bis zum Erreichen der Fließgrenze, also solange die Fließbedingung $f < 0$. Dann beginnt der plastische Bereich. Die elasto-plastische Federsteifigkeit C_F^{ep} ist nicht mehr konstant, sie ändert sich in Abhängigkeit von den Relativverdrehungen.

Die plastische Stoffgleichung ist allerdings nur für den Bereich gültig, in dem die Fließbedingung erfüllt ist ($f = 0$). Der Fall $f > 0$ ist nicht zulässig. Ist z.B. im Iterationsschritt i das innere Moment $M_{int\,i} = M_{int\,i-1} + \Delta M_{int\,i}$ und die Fließbedingung ergibt sich zu $f\,(M_{int\,i}) > 0$, dann befindet sich das Moment außerhalb der „Fließfläche“, was unzulässig ist.

Daher muss in einem nächsten Schritt, der Punkt gefunden werden, an dem die „Fließfläche“ durchquert wird, bzw. in diesem Fall muss der Punkt gefunden werden an dem das Fließmoment erreicht ist. Das wird im Ablaufdiagramm des Algorithmus Abbildung 4.10 durch Aufrufen der Funktion „Berechnen von r“ durchgeführt.

Funktion „Berechnen von r“

Dazu wird das Moment, an dem die Fließbedingung genau erfüllt ist, mit $M_{int\,i-1} + r\,\Delta M_{int\,i}$ ausgedrückt. War der Anfangszustand bereits im plastischen Bereich (auf der Fließfläche), dann ist $r = 0$, anderenfalls kommt es zu einem Übergang vom elastischen auf dem plastischen Bereich und r liegt zwischen 0 und 1, siehe [9] [10].

$$f\,(M_{int\,i-1} + r\,\Delta M_{int\,i}) = 0 \tag{4.15}$$

Setzt man dieses Fließmoment $M_{int\,i-1} + r\,\Delta M_{int\,i}$ in die Fließbedingung ein und formt sie entsprechend um, erhält man die Lösung für r.

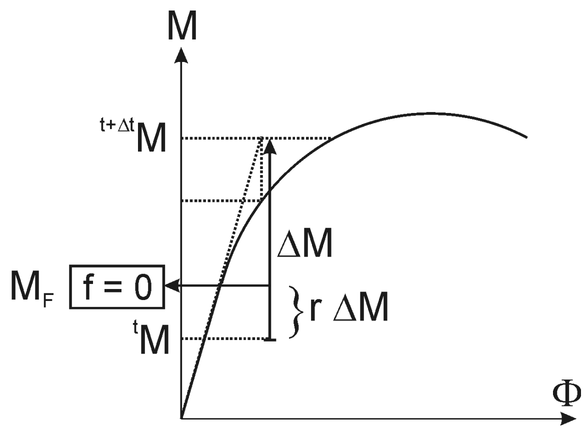

Abbildung 4.9: Rückrechnung des Moments (1D)

Im allgemeinen Spannungsraum σ_{ij} erhält man für r eine ziemlich umfangreiche quadratische Gleichung [10]. Für den einfachen Fall des eindimensionalen Gleichungssystems hat die Fließbdingung folgende Form:

$$f = \left|(M_{int\,i-1} + r\,\Delta M_{int\,i}) - M^b_{i-1}\right| - h\,(K)_{i-1} = 0 \tag{4.16}$$

Hier kann r relativ einfach ermittelt werden:

$$r = \frac{h\,(K)_{i-1} \mp \left|M_{int\,i-1} - M^b_{i-1}\right|}{\pm\left|\Delta M_{int\,i}\right|} \tag{4.17}$$

Mithilfe von r können nun die Weggrößen (bzw. Relativverdrehungen) in einen elastischen und einen plastischen Anteil zerlegt werden. Die Momente und Relativverdrehungen bis zum Fließbeginn sind dann:

$$\Phi^e_i = \Phi_{i-1} + r\Delta\Phi_i \tag{4.18}$$

$$M_{F\,i} = M_{int\,i-1} + r\,\Delta M_{int\,i} \tag{4.19}$$

Hierbei ist $M_{F\,i}$ das neue Fließmoment. Der Anteil der Relativverdrehungen im elasto-plastischen Bereich $(1-r)\,\Delta\Phi_i$ ist auch bekannt.

Das zugehörige Moment (zu $(1-r)\,\Delta\Phi_i$) muss nun neu berechnet werden, dieser Anteil wird zu $M_{F\,i}$ addiert und damit ist das endgültige Fließmoment in diesem Schritt bekannt.

Wenn das Verfestigungsgesetz linear ist, kann der Momentenanteil zufolge der plastischen Relativverdrehung direkt mit der konstanten plastischen Steifigkeit berechnet werden. Bei nichtlinearer Verfestigung kann das neue Moment und die zugehörige Steifigkeit aus den nichtlinearen Verfestigungsgesetzen berechnet werden.

Das Ablaufdiagramm zur „Rückrechnung des inneren Moments zufolge der Relativverdrehung“ ist in Abbildung 4.10 ersichtlich.

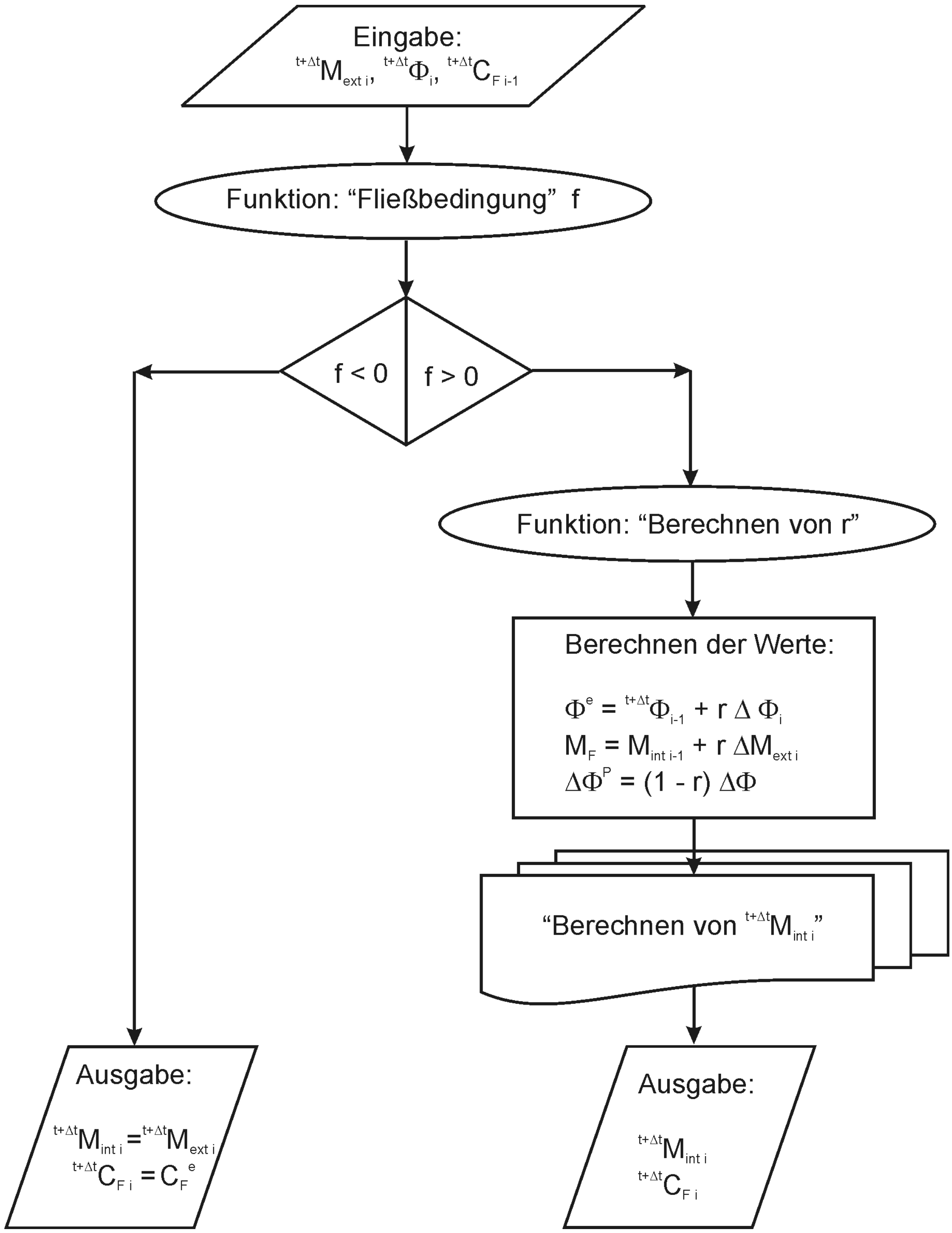

Abbildung 4.10: Ablaufdiagramm der „Rückrechnung des inneren Moments zufolge der Relativverdrehung“

Funktion „Berechnen von $^{t+\Delta t}M_{i\,int}$“

Zur Berechnung des inneren Momentes im elasto-plastischen Bereich bei gegebener Relativverdrehung wird ein numerisches Näherungsverfahren zur Integration von Differentialgleichungen angewendet. Es soll die unten stehende Gleichung gelöst werden:

$$\Delta M_{int\,i} = M_{F\,i} + \int_{\Phi_i + r\Delta\Phi}^{\Phi_i + \Delta\Phi} C_F^{ep}\left(\Phi_p, M\right) d\Phi \tag{4.20}$$

Hier handelt es sich um eine Anfangswertaufgabe: die Startwerte sind gegeben (Moment und Relativverdrehung). Dabei können verschiedene numerische Näherungsverfahren angewendet werden.

Im Weiteren wird hier das Verfahren nach Euler-Cauchy verwendet (oder auch „Euler-Vorwärts Verfahren"genannt). Es ist ein sehr einfaches und im Allgemeinen ein eher ungenaues Verfahren (in Abhängigkeit der Funktion und Schrittweite). Dabei wird ausgehend vom gegebenen Anfangswert die Lösung schrittweise berechnet. Der neue Index n für die Schritte (die Subinkremente) wird eingeführt.

Als Startwert wird das Ergebniss des letzten Iterationsschrittes verwendet: $M_{int\,i-1} = M_{int\,i\,n-1}$ und $\Phi_{i-1} = \Phi_{i\,n-1}$. Zwecks einer besseren Übersichtlichkeit wird der Index des Iterationsschrittes i weggelassen. Der Anfangszustand wird dann mit $M_{int\,n-1}$ und Φ_{n-1} bezeichnet (im ersten Schritt ist $n = 1$ und $n - 1 = 0$).

Damit kann auch die Anfangsfedersteifigkeit $C^{ep}_{F\,n-1}$ berechnet werden. Das geschieht im Algorithmus in Abbildung 4.11 durch Aufrufen der Funktion „Fließbedingung" (um die Werte zu aktualisieren) und dann mit der Funktion „elasto-plasitsche Federsteifigkeit", siehe dazu Abschnitt 4.2.4.

Der neue Momentenwert des jeweiligen Iterationsschrittes i soll berechnet werden ($M_{int\,i}$). Dazu wird der Relativverdrehungsanteil $(1-r)\,\Delta\Phi_i$ in n_{Sub} Subinkremente unterteilt, die Schrittweite eines Subinkrements $Sub\,\Phi$ ist dann

$$Sub\,\Phi = \frac{(1-r)\,\Delta\Phi_i}{n_{Sub}} \tag{4.21}$$

Für die Nachbarstelle $\Phi_n = \Phi_{n-1} + Sub\,\Phi$ kann das zugehörige Moment (bei kleinen Schrittweiten) linear angenähert werden.

$$M_{int\,n} = M_{int\,n-1} + C^{ep}_{F\,n-1}\,Sub\,\Phi \tag{4.22}$$

Aus den beiden neuen, im Allgemeinen fehlerhaften Werten kann die neue Federsteifigkeit $C^{ep}_{F\,n}$ berechnet werden. Die Werte zur Berechnung der elasto-plastischen Federsteifigkeit werden wieder durch Aufrufen der Funktion „Fließbedingung" aktualisiert und dann wird $C^{ep}_{F\,n}$ durch Aufrufen der Funktion „elasto-plasitsche Federsteifigkeit" berechnet. (siehe Abschnitt 4.2.4 „Aktualisieren der konstitutiven Gleichungen").

So kann das nichtlineare Verhalten Schritt für Schritt angenähert werden. Der so berechnete Funktionsverlauf entspricht nur näherungsweise der wirklichen Lösungsfunktion. Die Annäherung ist umso besser, je kleiner die Subinkremente gewählt sind.

Es gibt viele Methoden die Näherungswerte zu verbessern. Z.B. das Verfahren nach Runge-Kutta, in dem Zwischenstellen eingeschaltet werden und die Lösung durch eine Kombination an mehreren Zwischenstellen berechnet wird [3].

In den meisten kommerziellen Programmen wird heute das Euler-Rückwärts Verfahren angewendet. Bei dem sämtliche nichtlineare Grundgleichungen am Ende des Berechnungsschrittes angesetzt werden.

Für das in dieser Arbeit behandelte Problem wurde aber das einfache Verfahren von Euler-Cauchy verwendet. Die erforderliche Genauigkeit wird durch eine relativ kleine Schrittweite erreicht.

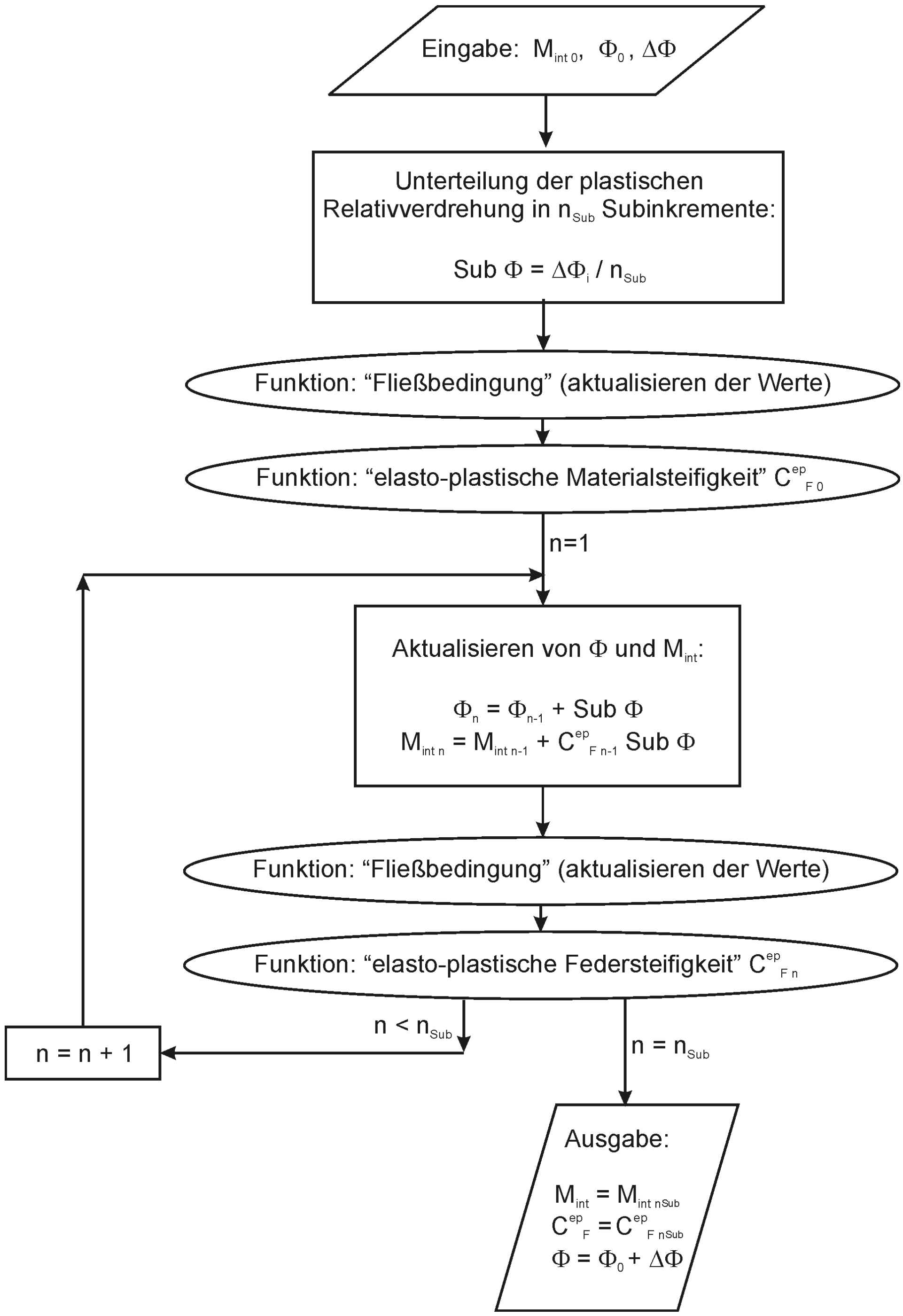

Abbildung 4.11: Ablaufdiagramm „Verfahren nach Euler-Cauchy“

4.2.4 Aktualisieren der konstitutiven Gleichungen

Je Iterationsschritt, sind außer den Momenten auch noch die Fließbedingung und die elasto-plastische Federsteifigkeit mitzuführen, dazu sind nun einige Werte zu aktualiesieren. Das geschieht im Algorithmus durch die Funktionen „Fließbedingung“ und „elasto-plastische Federsteifigkeit“.

Funktion „Fließbedingung“

Durch Aufrufen der Funktion „Fließbedingung“ werden zum einen die Werte M^b und $\bar{\Phi}^p$ aktualisiert (diese sind zur Berechnung der elasto-plastischen Federsteifigkeit erforderlich) und zum anderen wird die Fließbedingung berechnet (dafür sind die Werte M^b und R erforderlich).

Die Anfangswerte des Iterationsschritt $(i-1)$ sind bekannt und die Endwerte (i) sollen berechnet werden. Die konstitutiven Beziehungen für das reduzierte System (mit nur einer Kraftgröße M) sind bereits aus Abschnitt 3.3 bekannt. Anstelle der infinitesimalen Form werden diese Beziehungen hier in diskretisierter Form angschrieben (zB. $d\lambda \rightarrow \Delta\lambda$). Diese können nun folgendermaßen zusammengefasst werden:

- Lagrangescher Multiplikator:

$$\Delta\lambda_i = \frac{C_F^e \Delta\Phi \, sign\left(M - M^b\right)}{C_F^e + H_K \, sign\left(M - M^b\right) + \frac{\partial h(K)}{\partial K}} \tag{4.23}$$

- Fließregel (plastisches Relativverdrehungsinkrement):

$$\Delta\Phi_i^p = \Delta\lambda_i \, sign\Big(M - M^b\Big) \tag{4.24}$$

- Effektives plastisches Relativverdrehungsinkrement:

$$\Delta\bar{\Phi}_i^p = |\Delta\Phi_i^p| = \Delta\lambda_i \tag{4.25}$$

- Gesamte plastische Relativverdrehung:

$$\Phi_i^p = \Phi_{i-1}^p + \Delta\Phi_i^p \tag{4.26}$$

- Isotrope Verfestigung
  Lineare isotrope Verfestigung:

$$R_i = R_{i-1} + h_{iso} \, \Delta\bar{\Phi}_i^p \tag{4.27}$$

  Nichtlineare istotrope Verfestigung:

$$R_i = R_{i-1} + \beta \left(D_\alpha - R_{i-1}\right) \Delta\bar{\Phi}_i^p \tag{4.28}$$

  Neue Fließgrenze:

$$M_{Fi} = M_{F0} + R_i \tag{4.29}$$

- Kinematische Verfestigung
  Lineare kinematische Verfestigung (Melan-Prager):

$$M_i^b = M_{i-1}^b + h_{kin} \Delta\Phi_i^p \tag{4.30}$$

  Nichtlineare kinematische Verfestigung (Armstrong-Frederick):

$$M_i^b = M_{i-1}^b + C \, \Delta\Phi_i^p - \gamma \Delta\bar{\Phi}_i^p \, M_{i-1}^b \tag{4.31}$$

- Fließbedingung:

$$f = \Big|M_i - M_i^b\Big| - M_{Fi} \tag{4.32}$$

Funktion „elasto-plastische Federsteifigkeit“

Das Berechnen der elasto-plastischen Federsteifigkeit selbst erfolgt im Lösungsalgorithmus durch das Aufrufen dieser Funktion. Dafür müssen die Werte $M_{b\,i}$ und $\bar{\Phi}_{p\,i} = |\Phi_{p\,i}|$ durch vorheriges Aufrufen der Funktion „Fließbedingung“ bekannt sein.

Die Elasto-plastische Federsteifigkeit ist aus Abschnitt 3.3 bekannt:

$$C_{F\,i}^{ep} = C_F^e - \frac{C_F^e}{C_F^e + H_{K\,i} sign\left(M_i - M_i^b\right) + \frac{\partial h(K_i)}{\partial K_i}} \tag{4.33}$$

Der Anteil der isotropen Verfestigung $\frac{\partial h(K_i)}{\partial K_i}$ ergibt sich analog zu den Gleichungen 3.28 und 3.29 und der Anteil der kinematischen Verfestigung $H_{K\,i}$ ergibt sich analog zu den Gleichungen 3.30 und 3.31:

- Isotroper Verfestigungsanteil:
  Lineare isotrope Verfestigung:
  $$\frac{\partial h\left(K_i\right)}{\partial K_i} = h_{iso} \tag{4.34}$$
  Nichtlineare isotrope Verfestigung (Exponentialfunktion):
  $$\frac{\partial h\left(K_i\right)}{\partial K_i} = \beta D_\alpha exp\left(-\beta\left|\Phi_p\right|\right) = \beta\left(D_\alpha - R_i\right) \tag{4.35}$$
- Kinematischer Verfestigungsanteil:
  Lineare kinematische Verfestigung (Melan-Prager Regel):
  $$H_{K\,i} = h_{kin}\, sign(M_i - M_i^b) \tag{4.36}$$
  Nichtlineare kinematische Verfestigung (Armstrong und Frederick Verfestigung):
  $$H_{K\,i} = C\, sign(M_i - M_i^b) - \gamma\, M_i^b \tag{4.37}$$

h_{iso} und h_{kin} sind dabei die Verfestigungsparameter der linearen Verfestigungsgesetze und β, D_α, C und γ sind die Verfestigungsparameter der nichtlinearen Verfestigungsgesetze.

4.3 Kontrollrechnung

Der oben beschriebene Algorithmus wurde anhand eines einfachen Beispiels mittels einer Handrechnung kontrolliert. Diese Handrechnung wurde nach dem Laststeigerungsverfahren durchgeführt.

Es wurde ein Rahmen mit nur einem plastifizierenden Gelenk und mit linearer Verfestigung, unter einem einzigen Lastschritt berechnet, siehe Abbildung 4.12.

Die Ergebnisse der Handrechnung nach dem Laststeigerungsverfahren wurden mit den Ergebnissen der Computerrechnung verglichen, siehe Tabelle 4.2. Die Computerrechnung wurde hier mit dem modifizierten Newton-Raphson-Verfahren durchgeführt, bei einer Abbruchbedingung von $|\Delta R| <$ 10MN sind 59 Iterationsschritte erforderlich.

	M [Nm]	Φ [rad]	Iterationsschritte
Handrechnung	51.170,94	0,0013903	-
Computer Lösung (mod.N.R.)	51.163,64	0,0013879	59

Tabelle 4.2: Kontrollbeispiel, Vergleich der Ergebnisse

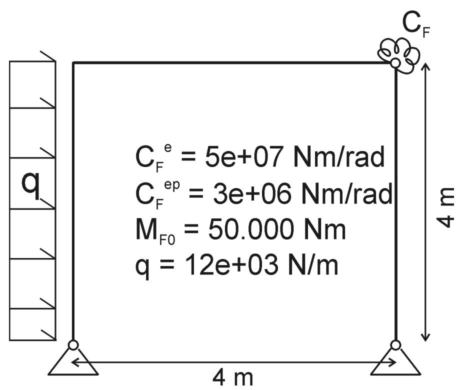

Abbildung 4.12: Kontrollbeispiel

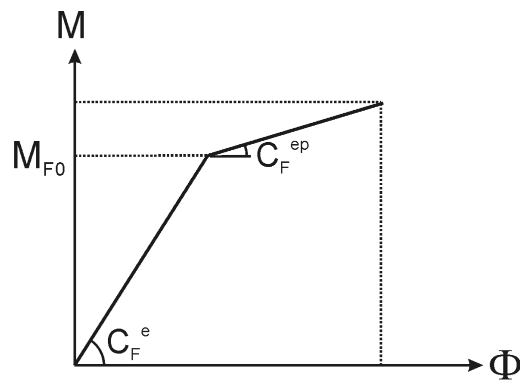

Abbildung 4.13: Momenten-Relativverdrehungs Diagramm der partiell-resistenten Verbindung

Im Weiteren wurden die Effekte einer zyklischen Beanspruchung kontrolliert. Dazu wurden mehrere Lastschritte auf das System aufgebracht und mit dem FE-Programm berechnet. Dabei wurde eine Berechnung mit einer linearen kinematischen Verfestigung durchgeführt (siehe Abbildung 4.14a)) und eine Zweite mit linearer isotroper Verfestigung (siehe Abbildung 4.14b)).

Die Ergebnisse dieser Berechnungen können durch die Betrachtung der Ergebnisse kontrolliert werden, siehe Abbildung 4.14.

- Kontrolle der Steigung:

  Die Steigung (die Steifigkeit C_F^e) im elastischen Bereich darf sich nie verändern. Bei linearen Verfestigungsgesetzen muss auch die Steigung im plastischen Bereich (die Steifigkeit C_F^{ep}) immer konstant bleiben.

- Kontrolle der Fließgrenzen:

  Bei rein kinematischer Verfestigung muss der „absolute“ elastische Bereich immer gleich groß bleiben. Denn die „Fließfläche“ verschiebt sich nur, vergrößert sich aber nicht (Abbildung 4.14, a).

  Für die rein isotrope Verfestigung muss die Fließgrenze immer in beide Richtungen ($+M_{F\,i}$ und $-M_{F\,i}$) symmetisch anwachsen. Denn die „Fließfläche“ vergrößert sich nur konzentrisch und verschiebt sich nicht (Abbildung 4.14, b).

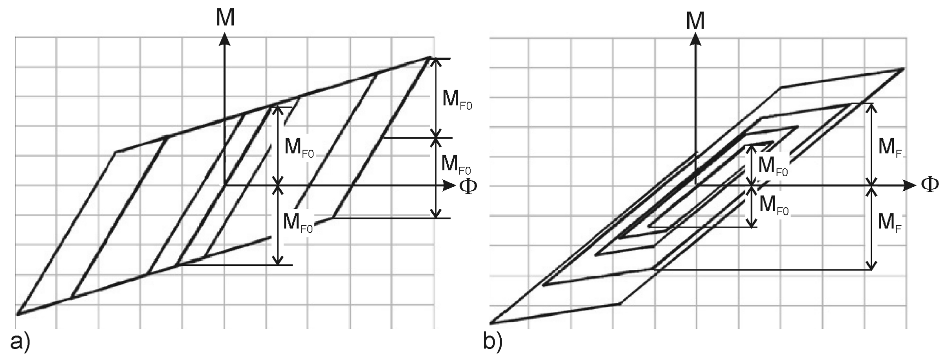

Abbildung 4.14: Ergebnisse: a) bei rein kinematischer Verfestigung, b) bei rein isotroper Verfestigung

Erweiterung auf mehrere partiell-resistente Verbindungen

Zur Kontrolle der Erweiterung des Algorithmus für eine Berechnung mit mehreren partiell-resistenten Verbindungen wurde das Beispiel aus Abbildung 4.15 berechnet.

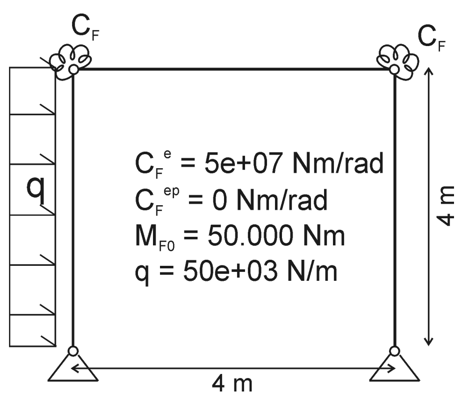

Abbildung 4.15: Kontrollbeispiel für mehrere partiell-resistente Verbindungen

Die Ergebnisse der Handrechnung (Laststeigerungsverfahren) und der Computerrechnung sind in Tabelle 4.3 gegenübergestellt, M_{li} sind dabei die Schnittmomente in der linken und M_{re} sind jene in der rechten partiell-resistenten Verbindung.

	M_{li} [Nm]	M_{re} [Nm]	Φ_{re} [rad]	Iterationsschritte
Handrechnung	46.000	-50.000	0,003318	-
Computer Lösung (N.R.)	46.000	-50.000	0,003318	1

Tabelle 4.3: Vergleich der Ergebnisse

Das Newton-Raphson-Verfahren führt bei linearer Verfestigung, mit dem ersten Iterationsschritt zu genauen Ergebnissen.

5 Charakterisieren der Parameter

5.1 Allgemein

Das Verhalten partiell-resistenter Verbindungen in Rahmentragwerken wird in dieser Arbeit mit Hilfe von Drehfedern mit der Federsteifigkeit C_F simuliert. Die Eigenschaften dieser Drehfedern werden mit den konstitutiven Beziehungen aus Kapitel 3 beschrieben.

Dafür ist es nun notwendig, geeignete Parameter für diese konstitutiven Beziehungen zu finden. Anhand von zwei ausgewählten Versuchsergebnissen für unterschiedliche Balken-Stützen-Verbindungen, sollen in diesem Kapitel nun die Parameter identifiziert werden.

5.2 Tests

Um qualitative und quantitative Vergleiche zwischen den unterschiedlichen Tests und den interpretierten Parametern aufstellen zu können, wurde im europäischen Raum eine einheitliche Methode eingeführt („The European Convention for Constructional Steelwork“ ECCS, 1986, No. 45) in der Richtlinien zur Durchführung solcher Tests aufgestellt werden.

Testaufbau

Das Grundsätzliche Modell eines Testaufbaus für zyklisch beanspruchte Balken-Stützen-Verbindungen ist in Abbildung 5.1 ersichtlich. Die Stütze ist beidseitig gelenkig gelagert und die Belastung wird auf das freie Balkenende aufgebracht.

Die Schnittkräfte in diesem System ändern sich auch bei einer veränderlichen Federsteifigkeit C_F nicht.

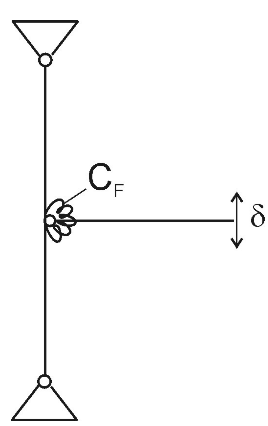

Abbildung 5.1: Versuchsnachstellung

Zyklische Beanspruchung

Die Belastung besteht aus schrittweise anwachsenden Deformationszyklen. Jeder Lastschritt ist durch eine maximale Balkenendverformung δ und durch die Anzahl der Zyklen definiert.

Da es sich hier um verformungskontrollierte Beanspruchung handelt und nicht um kraftkontrollierte, ist bei diesem System die Newton-Raphson Iteration nicht erforderlich. Es kann direkt von den aufgebrachten Verformungen auf die inneren Kräfte geschlossen werden.

Testergebnisse

Bei diesen Tests wird das Momenten-Rotationsverhalten ($M - \Theta$) unter zyklischer Beanspruchung gemessen und ausgegeben.

Die Rotation Θ ist dabei aber nicht zu verwechseln mit der Relativverdrehung Φ zwischen Balken und Stütze, wie sie in den vorherigen Kapiteln, zur Berechnung der konstitutiven Gleichungen, verwendet wurde. Θ ist dabei der „geschossweise Abdriftwinkel“ (bzw. die Rotationskapazität), wie in Abbildung 5.2 dargestellt (siehe auch Abschnitt 1.2.5).

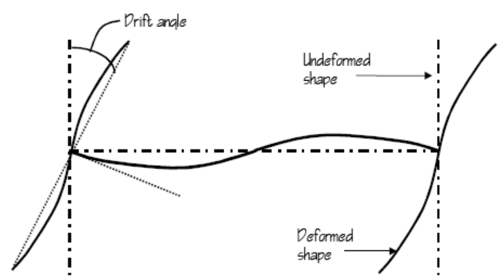

Abbildung 5.2: Geschossweiser Abdriftwinkel [5]

Für die Versuchsaufstellung ist Rotation Θ laut Abbildung 5.3 definiert. Es kann also direkt von den Balkenendverformung δ auf die Rotation geschlossen werden $\Theta = \delta/L$.

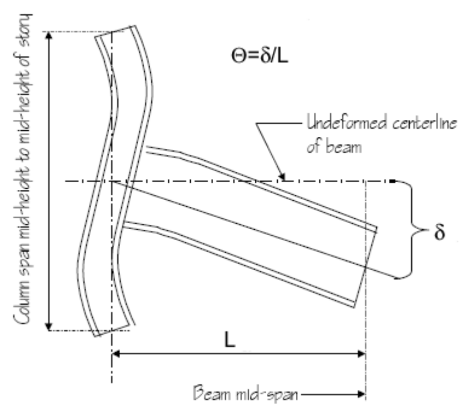

Abbildung 5.3: Rotationskapazität Θ [5]

Versuchs-Nachstellung in ANSYS

Für die Finite Elemente Rechnung gelten andere Voraussetzungen als bei den Versuchen. In den Versuchsaufbauten können die Auflager nicht vollkommen starr ausgebildet werden, da die rund-um aufgebaute Konstruktion geringfügig nachgiebig ist. In den Versuchen werden deshalb auch die Verformungen der Auflager mitgemessen, um damit dann aus den Absolutverformungen die Relativverformungen rückrechnen zu können.

Für die Nachstellung in ANSYS [1] werden starre Auflager angenommen. Als Beanspruchungen für die FE-Rechnung müssen daher die Relativverformungen und nicht die Absolutverformungen aus den Versuchsergebnissen herangezogen werden.

5.3 Parameter Identifikation

Es müssen insgesamt 6 Parameter identifiziert werden, um eine partiall-resistente Verbindung (bzw. eine Drehfeder, C_F) mit den vorher beschriebenen konstitutiven Modellen simulieren zu können:

- Zwei elastische Parameter: das Anfangsfließmoment M_{F0} und die elastische Federsteifigkeit C_F^e.
- Vier plastische Parameter für die Verfestigungseigenschaften (für die nichtlineare Verfestigung): C, γ, D_α und β.

5.3.1 Elastische Eigenschaften

Dabei wird zunächst das Verhalten des Systems im elastischen Bereich beobachtet. Aus den Testergebnissen kann das Anfangsfließmoment M_{F0} und die zugehörige Rotation bei Fließbeginn Θ_{F0} abgelesen werden. Zur Berechnung der elastischen Federsteifigkeit des Strukturelements (der Drehfeder C_F^e) ist aber die Relativverdrehung Φ_{F0} erforderlich.

$$C_F^e = \frac{M_{F0}}{\Phi_{F0}} \tag{5.1}$$

Es kann also nicht direkt von der Rotation Θ_{F0} auf die Federsteifigkeit geschlossen werden. Die Federsteifigkeit C_F^e muss auf iterativem Wege ermittelt werden.

Als Startwert wird hier angenommen: $\Phi_{F0\,0} = \Theta_{F0}$, damit kann die elastische Federsteifigkeit $C_{F\,0}^e = \frac{M_{F0}}{\Phi_{F0\,0}}$ berechnet werden. Mit diesen Anfangsannahmen wird nun die FE-Rechnung durchgeführt. Als Ergebniss der Berchnung kann die Rotation $\Theta_{F0\,0}$ abgelesen und mit der Rotation Θ_{F0} verglichen werden.

Dieser erste Schritt führt im Allgemeinen zu einem zu weichen Tragverhalten.

Im nächsten Schritt rechnet man das System mit einer neuen, etwas größeren elastischen Federsteifigkeit $C_{F\,1}^e$ aus und erhält damit $\Theta_{F0\,1}$. Die Iteration wird solange durchgeführt (die Steifigkeit wird solange erhöht) bis die Rotation $\Theta_{F0\,n} = \Theta_{F0}$ erreicht wird. Damit ergibt sich die elastische Federsteifigkeit zu $C_F^e = C_{F\,n}^e$.

5.3.2 Plastische Eigenschaften

Die Verfestigung im plastischen Bereich setzt sich, wie bereits aus Kapitel 2 bekannt, aus einem isotropen Anteil $h = M_{F0} + R$ und einem kinematischen Anteil M^b zusammen.

Zur Identifizierung der vier Verfestigungsparameter C, γ, D_α und β werden im Weiteren die Anteile der isotropen und der kinematischen Verfestigung getrennt behandelt.

$$M = M_{F0} + R + M^b \qquad \text{bzw.} \qquad M - M_{F0} = R + M^b \tag{5.2}$$

Aus den Versuchsergebnissen wird die Momenten-Rotations-Kurve eines halben Beanspruchungs-Zyklus (in positiver Richtung) betrachtet. Einige Messpunkte werden herausgeholt und in die Anteile R und M^b zerlegt.

Durch die Aufspaltung in zwei unabhängige Gleichungen kann das interaktive graphische Tool „nlintool“ in Matlab [8] verwendet werden. Dieses ist für nichtlineare Ausgleichsprobleme geeignet und basiert auf der „Methode der kleinsten Fehlerquadrate“.

Isotrope Verfestigung

Die Parameter D_α und β für die exponentielle isotrope Verfestigung werden mit Hilfe der isotropen Momentenanteile R und der Gleichung 5.3 ermittelt.

$$R = D_\alpha \left(1 - exp\left(-\beta \left|\Phi^p\right|\right)\right) \tag{5.3}$$

Kinematische Verfestigung

Für die Armstrong Frederick Verfestigung werden die Parameter C und γ mit Hilfe der kinematischen Momentenanteile M^b ermittelt.

Die allgemeine Form für die Armstrong Frederick Verfestigung ist in Gleichung 5.4 ersichtlich, siehe [17].

$$M^b = \frac{C}{\gamma} sign\left(d\Phi^p\right) + \left(M^{b\,0} - \frac{C}{\gamma} sign\left(d\Phi^p\right)\right) exp\left[-\gamma\left(\Phi^p - \Phi^{p\,0}\right) sign\left(d\Phi^p\right)\right] \tag{5.4}$$

Dabei ist $M^{b\,0}$ der initiale kinematische Momentenanteil und $\Phi^{p\,0}$ der initiale plastische Verzerrungsanteil.

Da hier aber nur ein halber, positiver Beanspruchungszyklus betrachtet wird, vereinfacht sich die obige Gleichung auf:

$$M^b = \frac{C}{\gamma} - \frac{C}{\gamma} exp\left[-\gamma \Phi^p\right] \tag{5.5}$$

5.3.3 Verfestigungsverhalten

Umrechnung $\Theta \rightarrow \Phi$

Aus den Testergebnissen können, für ausgewählte Messpunkte, die Momentenanteile M^p und die Rotationen Θ^p abgelesen werden.

Zur Ermittlung der Verfestigungsparameter sind aber die Relativverdrehungen Φ^p erforderlich.

Wobei hier, für die monotone, positive Beanspruchung gilt:

$$M^p = M - M_{F0} \tag{5.6}$$

$$\Theta^p = \Theta - \Theta_{F0} \tag{5.7}$$

$$\Phi^p = \Phi - \Phi_{F0} \tag{5.8}$$

Es kann allerdings nicht direkt von Θ^p auf Φ^p geschlossen werden. Für den Anfang können aber die Verhältnisse, die aus den elastischen Ergebnissen bekannt sind, verwendet werden.

$$x_0 = \frac{\Phi_{F0}}{\Theta_{F0}} \tag{5.9}$$

Mit dem Faktor x_0 aus dieser ersten Annahme und den Werten Θ^p aus den Ergebnissen können die Werte Φ_0^p rückgerechnet werden:

$$\Phi_0 = x_0 \Theta \tag{5.10}$$

Mit dem Momentenanteil M^p und den neu errechneten Werten Φ_0^p an den Messpunkten können die Startparameter ermittelt werden. Dafür kann eine beliebigen Aufspaltung der Verfestigungsanteile gewählt werden (zB. $0\% R$ und $100\% M^b$), die Parameter (C, γ, D_α β) können mit dem Matlab-Tool „nlintool" angenähert werden.

Mit diesen Startparametern und einer monotonen positiven Beanspruchung wird die FE Berechnung durchgeführt. Aus den Ergebnissen können die Werte M_1, Φ_1 und Θ_1 an den gewünschten Messpunkten ausgegeben werden.

Mit diesen Werten ist es nun möglich die neuen Faktoren x_1 an unterschiedlichen Punkten auszurechnen.

$$x_1 = \frac{\Phi_1}{\Theta_1} \tag{5.11}$$

Mit den Faktoren x_1 kann im Weiteren für jeden Messpunkt die Relativverdrehung $\Phi_1^p = \Phi_1 - \Phi_{F0}$ aus der Rotation Θ^p rückgerechnet werden.

Mit dem Momentenanteil M^p und den neu errechneten Werten Φ_1^p der Messpunkte, kann nun fortgefahren werden. Die neuen Parameter werden wieder ermittelt, die FE Rechnung wird durchgeführt und die Ergebnisse M_2, Φ_2 und Θ_2 werden ausgegeben. Daraus werden die neuen Faktoren x_2 ermittelt. Wenn diese mit den vorherigen Werten x_1 übereinstimmen, kann abgebrochen werden, sonst wird fortgefahren.

Am Ende sind nun für alle Messpunkte an den Stellen M^p nicht nur die plastischen Anteile der Rotationen Θ^p sondern auch die plastischen Anteile der Relativverdrehungen Φ^p bekannt, die zur weiteren Berechnung benötigt werden.

Aufteilung der Verfestigungsanteile

Die plastischen Momente M^p an den Messpunkten sollen nun in geeigneter Weise in die Anteile R und M^b aufgespalten werden, um das Verhalten so gut wie möglich an die Versuchsergebnisse anzugleichen. Da es meist nicht auf den ersten Blick klar ersichtlich ist, in welchem Verhältnis sich die plastischen Momente M^p aufspalten und um einen besseren Überblick über die Auswirkungen der Aufspaltung zu bekommen, werden hier verschiedene Varianten durchprobiert.

Dabei werden unterschiedliche prozentuelle Aufspaltungen angenommen, berechnet und miteinander und mit den Versuchsergebnissen verglichen (siehe dazu Abbildung 5.4). Die Aufteilung mit der besten Übereinstimmung, wird ermittelt.

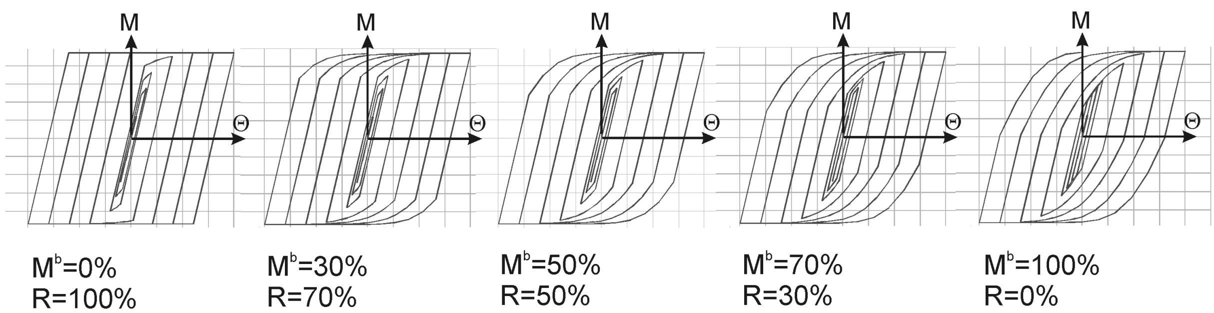

Abbildung 5.4: Prozentuelle Aufspaltung der Verfestigungsanteile

5.4 Versuch 1

5.4.1 Allgemein

In [14] wurden zwei große geschraubte Stahlverbindungen in Experimenten untersucht. Laut [14] folgte aus vorangegangenen Versuchen die Erkenntnis, dass bei großen und schweren Balken die Verwendung von angeschweißten Rippen (T-Profile) über den Balken-Flanschen von Vorteil sind. Die Schweißarbeiten solcher Verbindungen können im Werk zuverlässig hergestellt werden und die Verbindung kann mittels Schrauben auf der Baustelle einfach zusammengefügt werden. Diese Verbindungsart lässt sich also ohne aufwendige Qualitätskontrolle auf der Baustelle ausführen.

Hier wurde die erste der beiden Proben betrachtet. Das Verbindungsdetail ist in Abbildung 5.5 dargestellt.

Versuchsaufbau und Versuchsablauf

Der Versuchsaufbau ist in Abbildung 5.6 und Abbildung 5.7 ersichtlich. Der Balken hat eine Länge von 3.3m und die Stütze ist 3.54m lang.

Die Testprozedur wurde laut ATC-24 („Guidelines for cyclic seismic testing of components of steel structures") durchgeführt. Die zyklische Beanspruchung ist durch maximale Balkenendverformungen und durch die Anzahl der Zyklen definiert.

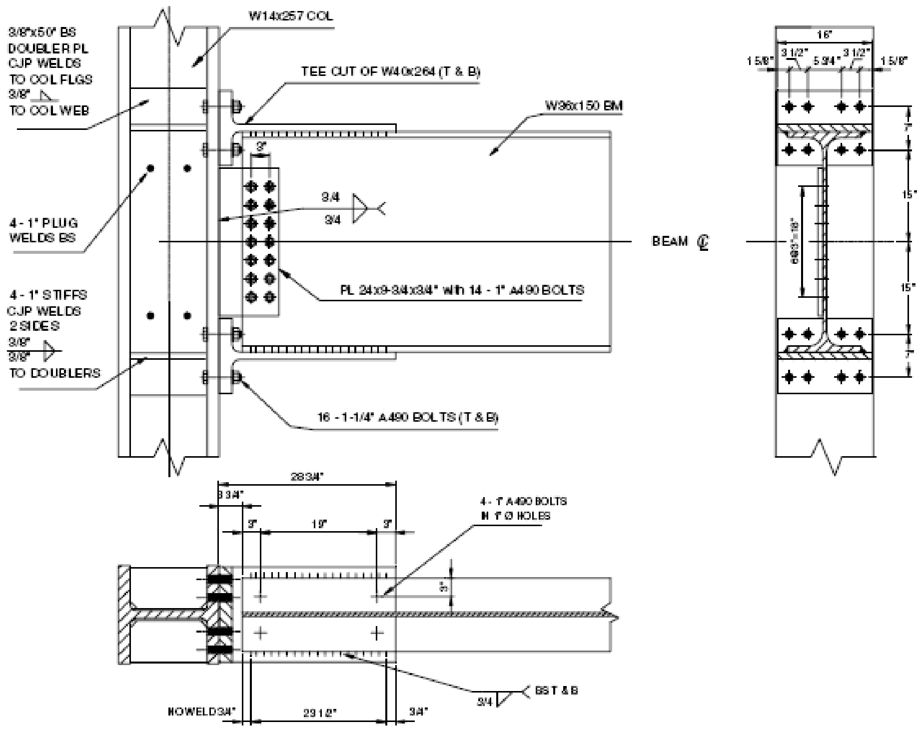

Abbildung 5.5: Verbindungsdetail [14]

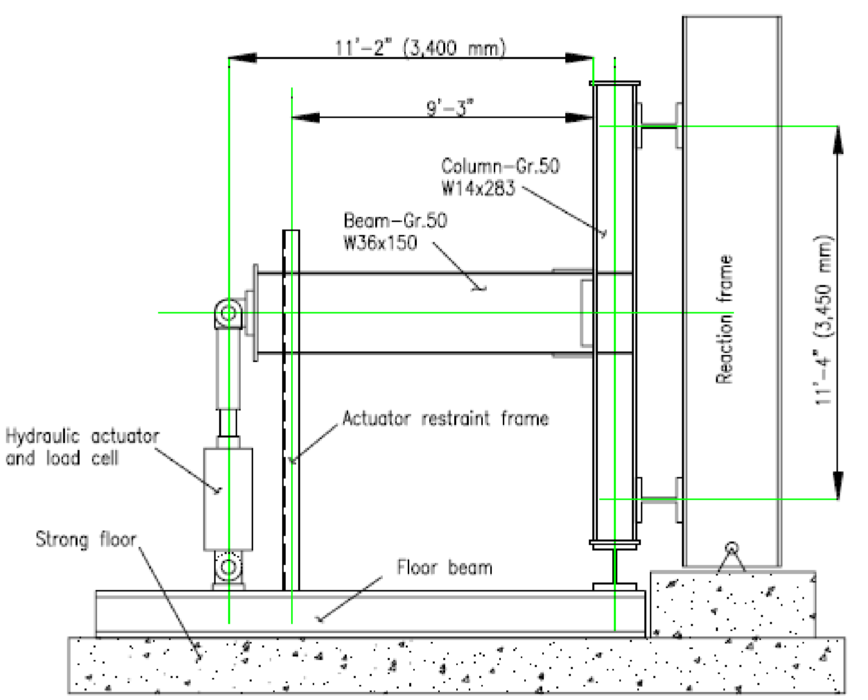

Abbildung 5.6: Versuchsaufbau [14]

Abbildung 5.7: Versuchsaufbau [14]

Ergebnisse

Eine Separation der angeschweißten T-Profil-Flansche und der Stützenflansche ergibt sich durch die plastische Deformation der T-Profile. Dadurch kann die zu dissipierende Energie aufgenommen werden. Großes Beulen im Balkensteg oder in den Balkenflanschen wird damit verhindert. Die plastische Balkenverformung ist minimal, siehe Abbildung 5.8 und Abbildung 5.9.

Die Momentenkapazität solcher Verbindungen hängt vom Verhalten der Flansch-Schweißstellen unter zyklischer Beanspruchung ab.

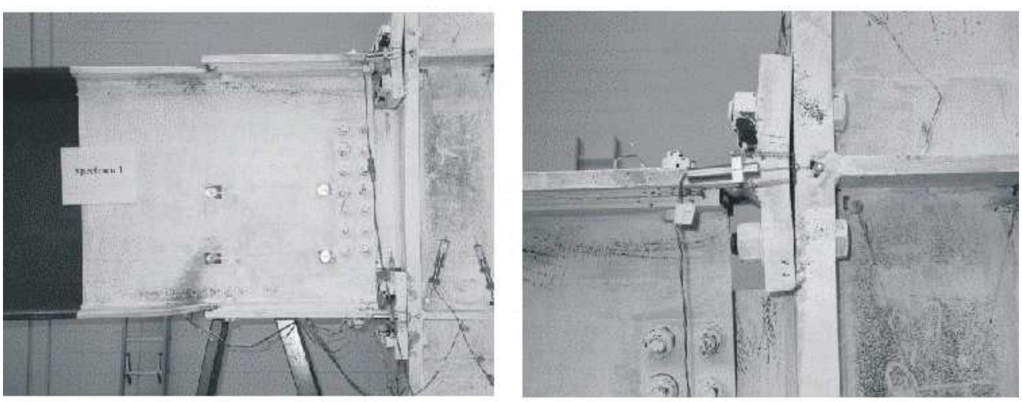

Abbildung 5.8: Probekörper nach dem Test [14]

5.4.2 Versuchs-Nachstellung in ANSYS

Der Versuchsaufbau wird im FE-Programm ANSYS [1] nachgestellt, siehe Abbildung 5.1. Die Belastung wird in der Computerrechnung durch die relativen Balkenendverformungen simuliert. Die relativen Balkenendverformungen können aus den Versuchsergebnissen ermittelt werden (siehe Tabelle 5.1) und als Belastung für die Computerrechnung aufgebracht werden.

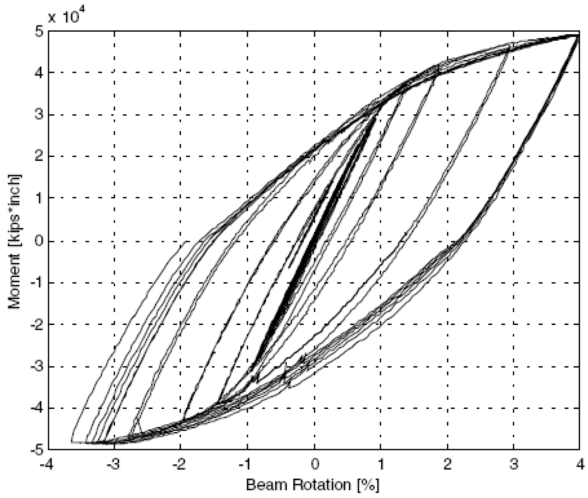

Abbildung 5.9: Momenten-Balkenrotation $(M - \Theta)$[14]

Belastungs-zyklen	relative Balkenend-verformungen δm
6	$\pm$ 0.00762
6	$\pm$ 0.01128
6	$\pm$ 0.01509
6	$\pm$ 0.02258
4	$\pm$ 0.03005
2	$\pm$ 0.0483
2	$\pm$ 0.0113
2	$\pm$ 0.0635
3	$\pm$ 0.0965
6	$\pm$ 0.1295

Tabelle 5.1: Beanspruchung Versuch 1

5.4.3 Parameter Identifikation

Elastische Parameter

Bei einem Fließmoment von $M_{F0} = 3.4 \cdot 10^6$Nm und einer zugehörigen Balkenverdrehung von $\Theta_{F0} = 0.009$rad ergibt sich nach der Methode aus Abschnitt 5.3.1 eine Relativverdrehung von rund $\Phi_{F0} = 0.0011$rad und eine elastische Steifigkeit von $C_F^e = 3.0 \cdot 10^9$Nm/rad.

Plastische Parameter

Zur Identifizierung der vier Verfestigungsparameter C, γ, D_α und β wurden aus den Versuchsergebnissen einige Messpunkte der Momenten-Rotations-Kurve eines halben Beanspruchungs-Zyklus (in positiver Richtung) ausgewählt.

Mit dem Verfahren, welches in Abschnitt 5.3.3 beschrieben ist, kann auf die Relativverdrehungen Φ^p geschlossen werden, siehe Tabelle 5.2.

M^pMNm	Θ^prad	Φ^prad
0	0	0
0.58	0.0019	0.000240
0.80	0.0038	0.000472
1.10	0.0085	0.001044
1.46	0.0140	0.001720
1.90	0.0218	0.002674
2.04	0.0280	0.003432
2.33	0.0350	0.004288

Tabelle 5.2: Messpunkte Versuch 1

Die gesamten verfestigungsrelevanten Momentenwerte $M^p = M - M_{F0}$ werden in einen isotropen Anteil R und in einen kinematischen Anteil M^b aufgespalten. Für unterschiedliche prozentuelle Aufteilungen sind die Ergebnisse in Abbildung 5.10 dargestellt.

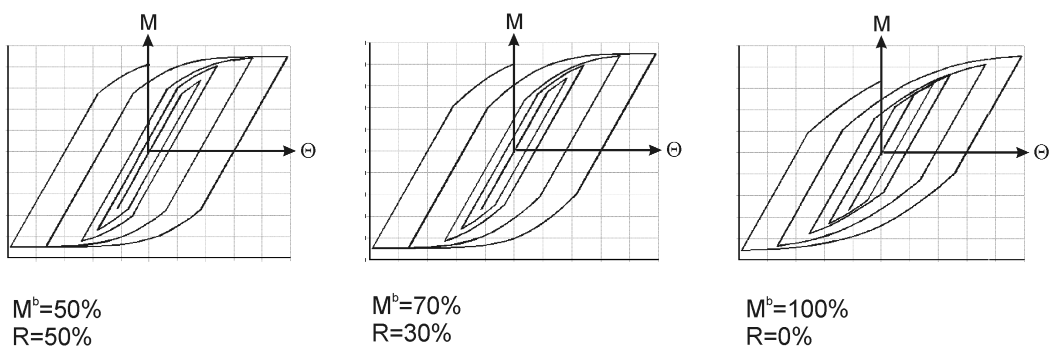

Abbildung 5.10: Prozentuelle Aufspaltung in kinematische M^b und isotrope R Verfestigung

Durch Überlagerung mit den Versuchsergebnissen ist ersichtlich, dass die Aufteilung mit 100% kinematischer und 0% isotroper Verfestigung am besten übereinstimmt, siehe Abbildung 5.11.

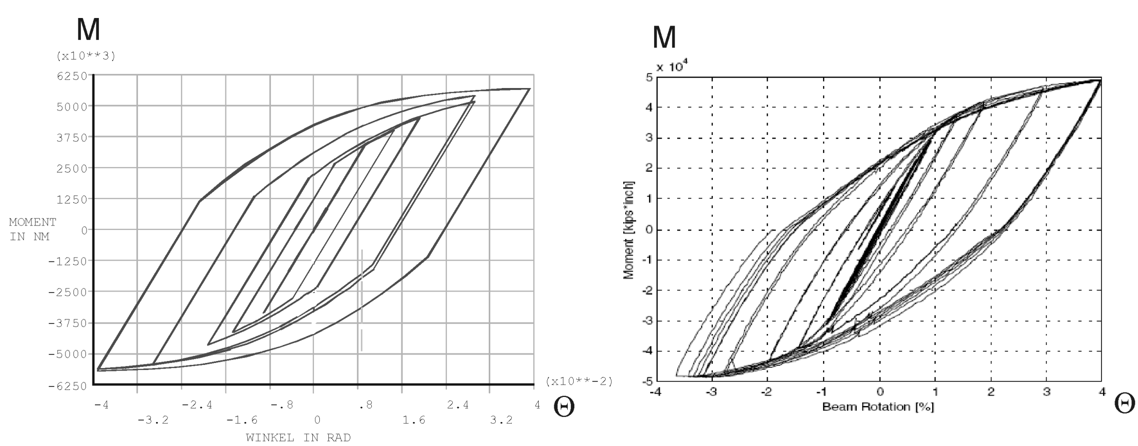

Abbildung 5.11: Momenten- Rotations- Diagramm, links: FE-Rechnung, rechts: Versuchsergebnis

Die Parameter D_α und β für die exponentielle isotrope Verfestigung und C und γ für die Armstrong Frederick Verfestigung wurden mit Hilfe des interaktiven graphischen Tools „nlintool“ in Matlab [8] ermittelt. Die Parameter ergeben sich laut Tabelle 5.3.

M_{F0}MNm	C_F^eMNm/rad	C	γ	D_α	β
3.4	3000	$1.53908 \cdot 10^9$	656.7	0	0

Tabelle 5.3: Parameter Versuch 1

5.4.4 Einbindung in eine Tragstruktur

Mit den gefundenen Parametern für diese Verbindung kann nun eine beliebige Tragstruktur simuliert werden. In diesem Fall wurde ein einfaches Rahmentragwerk simuliert, siehe Abbildung 5.12. Die Beanspruchung ist durch eine anwachsende, zyklische, horizontal wirkenden Gleichlast gegeben.

$$q = \begin{bmatrix} +5 & -5 & +6.5 & -6.5 & +8 & -8 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^5 \mathrm{N/m}$$

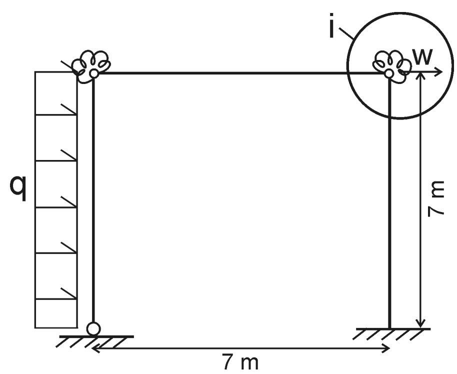

Abbildung 5.12: Rahmentragwerk

Für das rechte Fließgelenk (Knoten i) ist die Momenten- Relativverdrehungs- Beziehung und die zugehörige Last- Verformungsdrehungs- Beziehung in Abbildung 5.13 dargestellt. Die Ergebnisse können in Tabelle 5.4 nachgelesen werden.

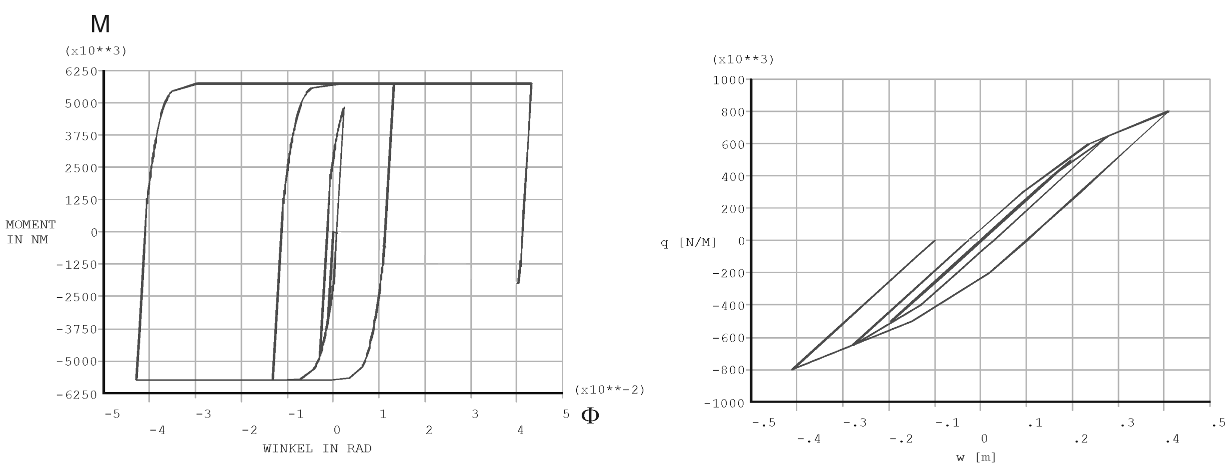

Abbildung 5.13: Ergebnisse, Knoten i

q kNm	M_i Nm	Φ_i rad	w_i m
+500	-4777446	-0.00292527	+0.19663838
-500	+4806869	+0.00233347	-0.19516681
+650	-5742833	-0.01321249	+0.27902795
-650	+5743656	+0.01319597	-0.27898687
+800	-5727734	-0.04289964	+0.40965749
-800	+5743675	+0.04321971	-0.41045338
0	-1988079	+0.04030619	-0.10022559

Tabelle 5.4: Ergebnisse, Knoten i

5.5 Versuch 2

5.5.1 Allgemein

In dem Test-Programm aus [11] wurden geschweißte Balken-Stützenverbindungen unter zyklischer Belastung untersucht, die representativ für übliche europäische Verbindungen sind.

Hier wurde die Probe „BCC6“ aus der Testreihe betrachtet. Das Verbindungsdetail ist in Abbildung 5.14 und Abbildung 5.15 dargestellt.

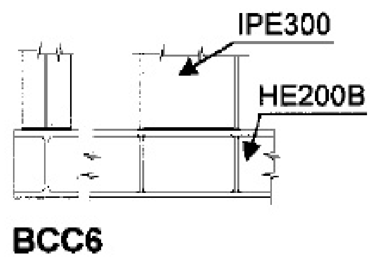

Abbildung 5.14: Verbindungsdetail [11]

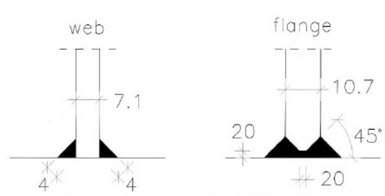

Abbildung 5.15: Schweißdetail [11]

Versuchsaufbau und Versuchsablauf

Der Versuchsaufbau ist in Abbildung 5.16 ersichtlich. Der Balken ist 1m lang und besteht aus einem IPE300 Profil, die Stütze ist 1.8m lang und besteht aus einem HE200B Profil.

Die zyklische, schrittweise anwachsende Beanspruchung entspricht der Belastungsgeschichte die laut ECCS („European Convention for Constructional Steelwork“) vorgeschlagen wird. Auch hier ist die Beanspruchung verformungskontrolliert. Die schrittweise anwachsenden Deformationszyklen sind durch die maximale Balkenendverformung und durch die Anzahl der Zyklen definiert.

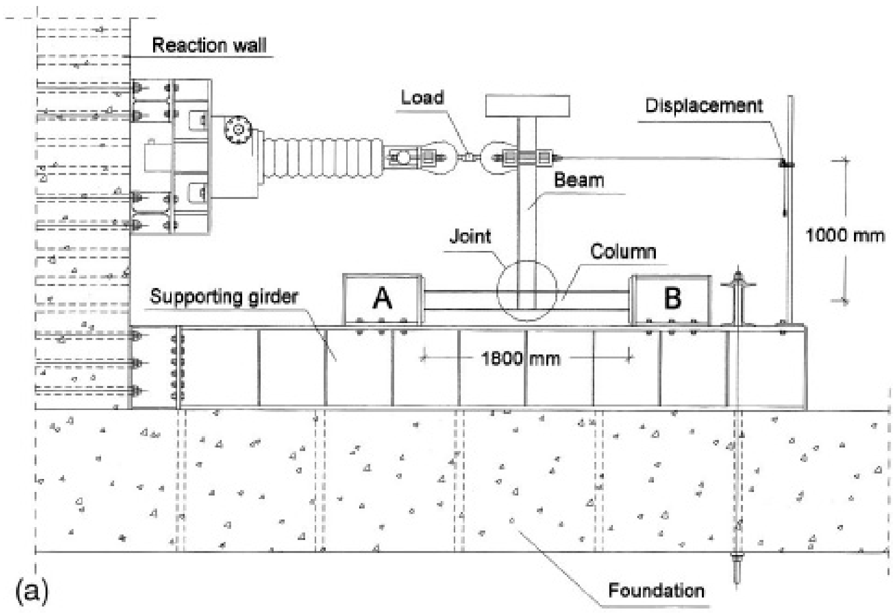

Abbildung 5.16: Versuchsaufbau [11]

Ergebnisse

Hier wird die Energie hauptsächlich durch das Beulen der Balkenflansche aufgenommen (es liegt also eine resistente Verbindung vor), das Versagen tritt durch den Bruch in der Beulzone ein, bis dahin ist das Verhalten duktil (siehe Abbildung 5.17 und Abbildung 5.18).

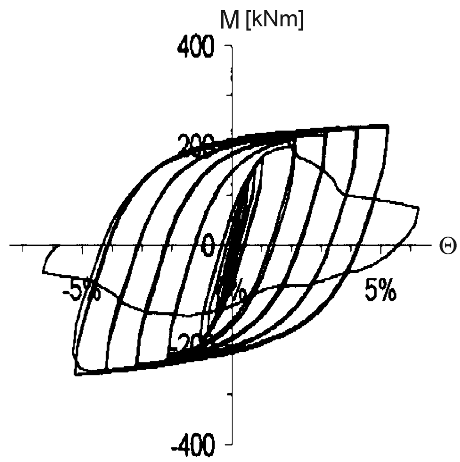

Abbildung 5.17: Momenten- Balkenrotation [11]

5.5.2 Versuchs-Nachstellung in ANSYS

Der Versuchsaufbau wird wieder im FE-Programm ANSYS [1] nachgestellt, siehe Abbildung 5.1.

Die Belastung wird in der Computerrechnung durch die relativen Balkenendverformungen simuliert, die aus den Versuchsergebnissen ermittelt werden können. Diese relativen Balkenendverformungen δ können aus den Balkenverdrehungen $\Theta = \delta/L$ rückgerechnet werden, siehe Tabelle 5.5.

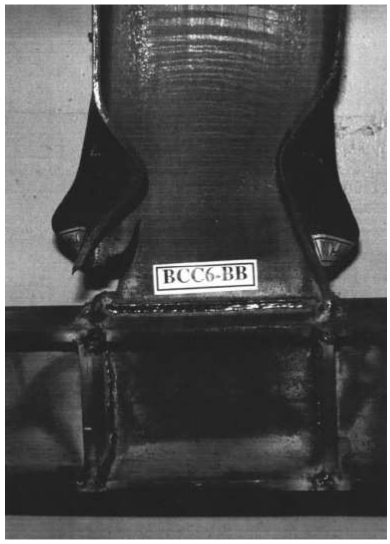

Abbildung 5.18: Probekörper nach dem Test [11]

Belastungs-zyklen	Balken-Verdrehung $\Theta = \delta/L\%$	relative Balkenend-verformungen δ m
1	$\pm$ 0.25	$\pm$ 0.0025
1	$\pm$ 0.5	$\pm$ 0.005
1	$\pm$ 0.75	$\pm$ 0.0075
1	$\pm$ 1	$\pm$ 0.01
3	$\pm$ 2	$\pm$ 0.02
3	$\pm$ 3	$\pm$ 0.03
3	$\pm$ 4	$\pm$ 0.04
3	$\pm$ 5	$\pm$ 0.05

Tabelle 5.5: Beanspruchung Versuch 2

5.5.3 Parameter Identifikation

Elastische Parameter

Bei einem Fließmoment von $M_{F0} = 0.12 \cdot 10^6$Nm und einer zugehörigen Balkenverdrehung von $\Theta_{F0} = 0.005$rad ergibt sich wie in Abschnitt 5.3.1 beschrieben eine Relativverdrehung von rund $\Phi_{F0} = 0.0009$rad und eine elastische Steifigkeit von $C_F^e = 1.3 \cdot 10^8$Nm/rad.

Plastische Parameter

Zur Identifizierung der vier Verfestigungsparameter C, γ, D_α und β wurden wieder Messpunkte der Momenten- Rotations- Kurve eines halben, positiven Beanspruchungs-Zyklus ausgewählt, siehe Tabelle 5.6.

Mit dem in Abschnitt 5.3.3 beschrieben Verfahren, können die Relativverdrehungen Φ^p rückgerechnet werden, siehe Tabelle 5.6.

M^pMNm	Θ^prad	Φ^prad
0	0	0
0.02807	0.0025	0.000460
0.05614	0.005	0.000921
0.07719	0.015	0.002765
0.10526	0.025	0.004609
0.11228	0.035	0.006453
0.11930	0.045	0.008297

Tabelle 5.6: Messpunkte Versuch 2

Die gesamten verfestigungsrelevanten Momentenwerte $M^p = M - M_{F0}$ sollen wieder in einen isotropen Anteil R und in einen kinematischen Anteil M^b aufgespalten werden. Die Ergebnisse für unterschiedliche prozentuelle Aufteilungen sind in Abbildung 5.19 ersichtlich.

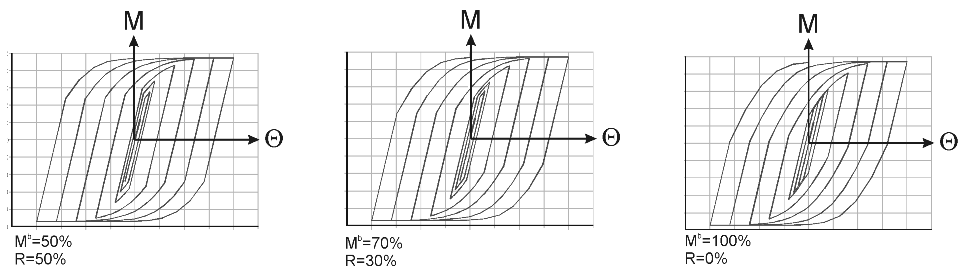

Abbildung 5.19: Prozentuelle Aufspaltung in kinematische Verfestigung M^b und isotrope Verfestigung R

Mit der Annahme, dass sich die Verfestigung zu 70% kinematisch und zu 30% isotrop verhält, kommt man nun zu folgender Annäherung an die tatsächlichen Ergebnisse, siehe Abbildung 5.20.

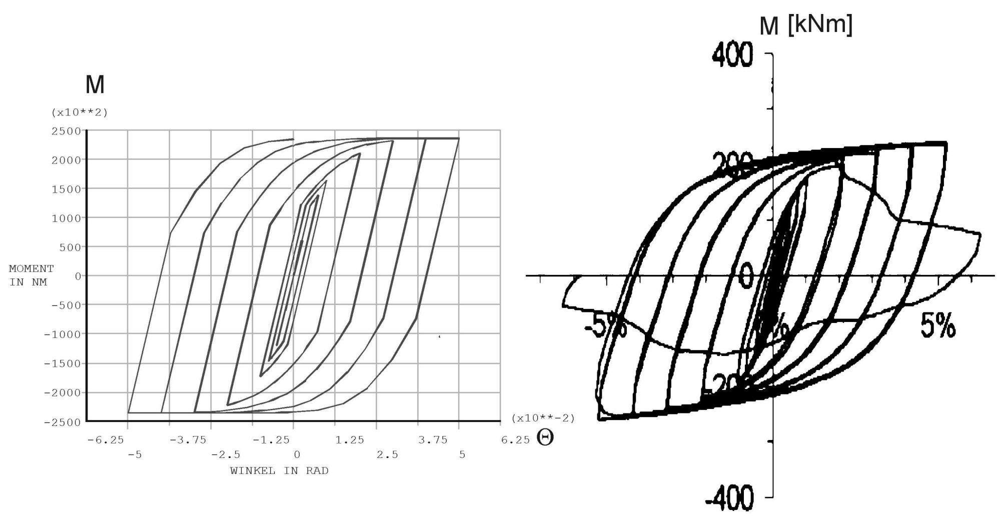

Abbildung 5.20: Momenten- Rotations- Diagramm, links: FE-Rechnung, rechts: Versuchsergebnis

Die Parameter D_α und β für die exponentielle isotrope Verfestigung und C und γ für die Armstrong Frederick Verfestigung wurden wieder mit Hilfe des interaktiven graphischen Tools „nlintool“ in Matlab [8] ermittelt. Die Parameter ergeben sich laut Tabelle 5.7.

M_{F0}MNm	C_F^eMNm/rad	C	γ	D_α	β
0.12	130	43114737	531.4	34771	531.4

Tabelle 5.7: Parameter Versuch 2

5.5.4 Einbindung in eine Tragstruktur

Mit den gefundenen Parametern kann nun eine beliebige ebene Rahmentragstruktur simuliert werden. In diesem Fall wurde ein Rahmen wie in Abbildung 5.21 dargestellt berechnet.

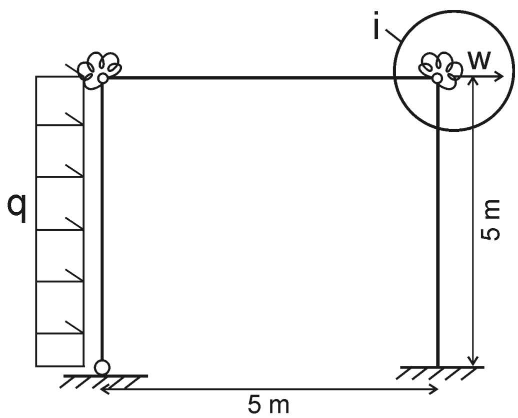

Abbildung 5.21: Rahmentragwerk

Die Beanspruchung ist durch eine anwachsende, zyklische, horizontal wirkenden Gleichlast gegeben.

$q = [+5;\ -5;\ +6;\ -6;\ +7;\ -7;\ 0] \cdot 10^4 \mathrm{N/m}$

Für das rechte Fließgelenk (Knoten i) ist die Momenten- Relativverdrehungs- Beziehung und das zugehörige Last- Verformungsdrehungs- Diagramm in Abbildung 5.22 dargestellt. Die Ergebnisse sind in Tabelle 5.8 aufgelistet.

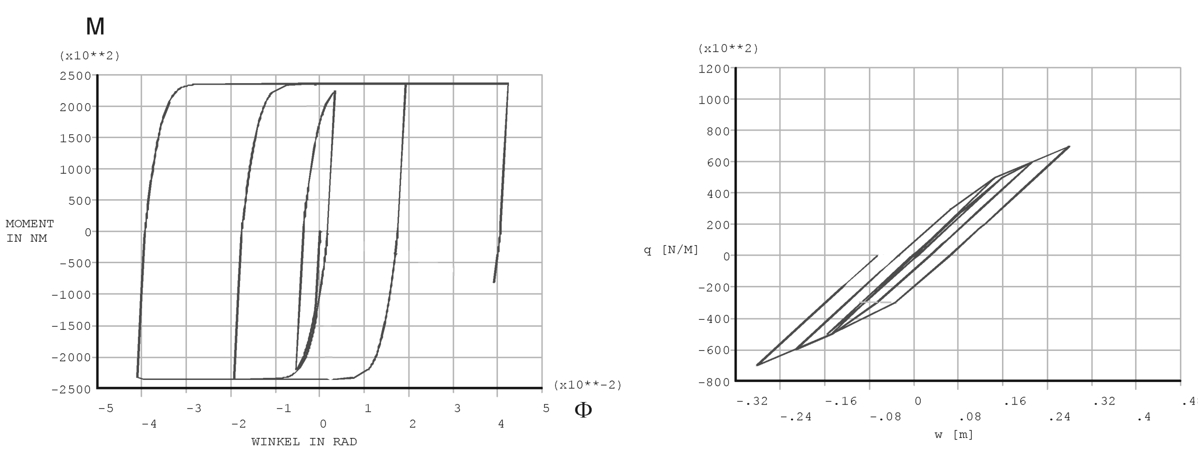

Abbildung 5.22: Ergebnisse, Knoten i

q kNm	M_i Nm	Φ_i rad	w_i m
+50	-219677	-0.00532328	+0.15891584
-50	+223771	+0.00341049	-0.15569452
+60	-235903	-0.01933024	+0.21249507
-60	+235907	+0.01932104	-0.21247959
+70	-233031	-0.04107395	+0.27947954
-70	+235907	+0.04237190	-0.28163921
0	-80764	+0.03918382	-0.06633907

Tabelle 5.8: Ergebnisse, Knoten i

A Spannungen und Dehnungen

Kartesische Tensoren

In dieser Arbeit werden die Tensoren mit griechischen oder lateinischen Buchstaben bezeichnet, deren Indizes $i, j, k, l, \ldots$ die Werte 1, 2 und 3 haben können (diese Werte entsprechen den kartesischen Koordinatenachsen x_1, x_2, x_3) während dick geschriebene Buchstaben die vollständigen Tensoren in kompakter Schreibweise darstellen.

Der allgemeine Spannungstensor ist ein Tensor 2. Ordnung und wird mit $\boldsymbol{\sigma}$ bezeichnet, mit den Komponenten σ_{ij}. Der allgemeine Verzerrungstensor wird mit $\boldsymbol{\epsilon}$ bezeichnet und die Komponeneten mit ϵ_{ij}. Der Material-Steifigkeitstensor $\boldsymbol{D}$ ist ein Tensor 4. Ordnung mit den Komponeneten D_{ijkl}, alle Indizes (i, j, k, l) können die Werte 1 bis 3 annehmen.

In dieser Arbeit wird die Einstein'sche Summenkonvention vorausgesetzt. Ein produkt-ähnlicher Ausdruck impliziert die Summe von 1 bis 3, wie z.B.:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D} : \boldsymbol{\epsilon} \;\rightarrow\; \sigma_{ij} = D_{ijkl}\,\epsilon_{kl} \;\rightarrow\; \sigma_{ij} = \sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} D_{ijkl}\,\epsilon_{kl} \tag{A.1}$$

Ein wichtiger Tensor 2. Ordnung ist das „Kronecker Delta“ $\boldsymbol{\delta}$. Es gilt $\delta_{ij} = 1$ wenn $i = j$ und $\delta_{ij} = 0$ wenn $i \neq j$. Er wird auch Einheitstensor 2. Ordnung genannt.

Hydrostatische und deviatorische Spannungsanteile

Oft ist es dienlich die beiden Effekte Volumenänderung und Formänderung zu separieren. Den „volumetrischen Anteil“ oder „hydrostatischen Anteil“ eines Tensors 2. Ordnung erhält man, indem man ihn in die Richtung des „Kronecker Deltas“ projeziert. Zum Beispiel ist der volumetrische Anteil des Verzerrungstensors $\epsilon_V\boldsymbol{\delta}$, wobei gilt $\epsilon_V = \frac{\boldsymbol{\epsilon\delta}}{\boldsymbol{\delta\delta}} = \frac{\epsilon_{ii}}{3}$. Analog dazu kann auch der volumetrische bzw. hydrostatische Anteil des Spannungstensors ausgedrückt werden: $\sigma_V\boldsymbol{\delta}$ und $\sigma_V = \frac{\sigma_{ii}}{3}$. Die Differenz zwischen dem gesamten Tensor und seinem volumetrischen Teil wird „deviatorischer Anteil“ genannt.

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} - \sigma_V\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{\sigma_{ii}}{3}\boldsymbol{\delta} \tag{A.2}$$

$$\boldsymbol{\epsilon}' = \boldsymbol{\epsilon} - \epsilon_V\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\epsilon} - \frac{\epsilon_{ii}}{3}\boldsymbol{\delta} \tag{A.3}$$

Hauptspannungen

Der Spannungstensor 2. Ordnung σ kann im Raum so gedreht werden, dass er nur noch Werte in der Diagonale besitzt und alle Werte σ_{ij} mit $i \neq j$ sind Null. Anders ausgedrückt: es gibt eine Orientierung, in der nur Normalspannungen auftreten und die Schubspannungen verschwinden. Diese so erhaltenen Komponenten sind die „Eigenwerte“ oder „charakteristischen Werte“ des Spannungstensors und werden auch Hauptspannungen σ_1, σ_2 und σ_3 genannt.

Die Spannungsinvarianten

Die Elemente des Spannungstensors σ_{ij} sind abhängig von der Lage des Koordinatensystems. Wird das Koordinatensystem gedreht, ändert sich der Spannungstensor obwohl der Zustand gleich bleibt. Die Spannungsinvarianten sind unabhängig von der Orientierung des Koordinatensystems und können sowohl durch die Elemente des allgemeinen Spannungstensors, als auch durch die Hauptspannungen ausgedrückt werden [17].

$$I_1 = \sigma_{ii} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \tag{A.4}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \sigma_{ii}\sigma_{jj}\right) = -\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1\right) \tag{A.5}$$

$$I_3 = det\,\sigma_{ij} = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \tag{A.6}$$

Die Invarianten des Deviators

Die Invarianten der deviatorischen Spannungen ergeben sich zu:

$$J_1 = \sigma_{ii}^{'} = 0 \tag{A.7}$$

$$J_2 = \frac{1}{2}\sigma_{ij}^{'}\sigma_{ij}^{'} = \frac{1}{6}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right] \tag{A.8}$$

$$J_3 = \frac{1}{3}\sigma_{ij}^{'}\sigma_{jk}^{'}\sigma_{ki}^{'} \tag{A.9}$$

B Quellcode

```
FINISH                                   ! Loeschen der DataBase
/CLEAR


!------------------------------------------------------------
! Eingabe Werte (alle Werte in N und m)
!------------------------------------------------------------
!Material des Tragwerks (Balken und Stützen):
emodul = 200.0e+9
nue = 0.25

!Balken:
bflaeche = 285.6e-4     !Fläche
bträghm = 376273e-8     !Trägheitsmoment
bqshoehe = 0.9106       !Trägerhöhe
blang=7                 !Balkenlänge

!Stütze:
sflaeche = 537.4e-4     !Fläche
sträghm = 159833e-8     !Trägheitsmoment
sqshoehe = 0.2452       !Trägerhöhe
slang=7                 !Stützenlänge

!Anzahl der plastifizierenden Verbindungen
gel = 2

!Lastschrittevektors
ls=26
*DIM,lastschritte,ARRAY,1,ls

lastschritte(1,1)=+4e+05
lastschritte(1,2)=+1e+05
lastschritte(1,3)=-5e+05
lastschritte(1,4)=-3e+05
lastschritte(1,5)=-2e+05
lastschritte(1,6)=+5e+05

lastschritte(1,7)=+2e+05
lastschritte(1,8)=+2e+05
lastschritte(1,9)=+2.5e+05
lastschritte(1,10)=-6.5e+05
lastschritte(1,11)=-2e+05
lastschritte(1,12)=-2e+05
lastschritte(1,13)=-2.5e+05
lastschritte(1,14)=+6.5e+05

lastschritte(1,15)=+3e+05
lastschritte(1,16)=+3e+05
lastschritte(1,17)=+2e+05
lastschritte(1,18)=-2e+05
lastschritte(1,19)=-3e+05
lastschritte(1,20)=-3e+05
lastschritte(1,21)=-2e+05
lastschritte(1,22)=-3e+05
lastschritte(1,23)=-3e+05
lastschritte(1,24)=+2e+05
lastschritte(1,25)=+3e+05
lastschritte(1,26)=+3e+05



iter=10                 !max. Iterationsschritte (Newton-Raphson Iteration)
```

```
abbr=2.0e+01               !Abbruchbedingung (Newton-Raphson Iteration)
numsub=20                  !Subschritte (Euler-Cauchy)

!-------------plastifizierenden Verbindungen-------------
!-----------------Verfestigungsparameter-----------------
!--------------------------------------------------------
cel = 3.0e+09              !Steifigkeit im elastischen Bereich
mfliess0=3.4e+06           !Fließmoment
!-----------------lineare Verfestigung-------------------
!hiso=0
!hkin=0
!------------kinemat. nichtlineare Verfest.--------------
!------------Armstrong Frederic--------------------------
kinc=1.539079e+09
kingamma=656.7
!-----------isotrop nichtlineare Verfest.---------------
!-----------Exponentiell--------------------------------
eiso=0
betta=0
dalpha=0
!----------------------------------------
! Initialisieren des Anfangszustandes
!-------Vektoren dimensionieren-------
*DIM,feders,,1,gel

*DIM,t_mom,,1,gel
*DIM,t_phi,,1,gel
*DIM,dt_phipl,,1,gel
*DIM,t_F,,1,gel
*DIM,cpl,,1,gel

*DIM,tudt_mom_ges,,1,gel
*DIM,tudt_phi_ges,,1,gel
*DIM,tudt_mom_el,,1,gel
*DIM,tudt_phi_el,,1,gel

*DIM,dt_phi_i,,1,gel
*DIM,tudt_phi_i,,1,gel
*DIM,dt_mom_i,,1,gel
*DIM,tudt_mom_i,,1,gel
*DIM,tudt_F_i,,1,gel

*DIM,dR_n,,1,gel
*DIM,t_mom_n,,1,gel
*DIM,tudt_F_n,,1,gel
*DIM,dt_mom_ges,,1,gel

*DIM,dt_phii,,1,gel
*DIM,dt_phij,,1,gel
*DIM,dt_mom_n,,1,gel
*DIM,dt_phi,,1,gel

*DIM,backstress,,1,gel
*DIM,mfliess,,1,gel
*DIM,fliess,,1,gel
*DIM,miso,,1,gel

*DIM,ges_plphi,,1,gel

*DIM,t_w,,1,gel
*DIM,dt_w,,1,gel
*DIM,tudt_w,,1,gel
*DIM,t_w_zw,,1,gel
*DIM,Ls_zw,,1,gel


!-----------Startwerte-----------
num=0
t_delta = 0
t_bphi = 0
kin_ant=0
iso_ant=0
Lsges=0
```

```
!------------------------------------------------------------
!---------------Funktionen-----------------------------------
!------------------------------------------------------------
*CREATE, pl_gel             !Federsteifigkeit , ARG1=Moment
  !---------Kinematischer Verfestigungsanteil------------------------
  !-------------------------------------------------------------------
  !kin_ant=hkin*SIGN(1,(ARG1-backstress(1,g)))          !linear

  kin_ant=kinc*SIGN(1,(ARG1-backstress(1,g)))-kingamma*backstress(1,g)!Armstrong Frederick

  !-------Isotroper Verfestigungsanteil---------------------------------
  !--------------------------------------------------------------------
  !iso_ant=hiso                                         !linear

  iso_ant=betta*(dalpha-miso(1,g))+eiso                 !exponentiell

  !-------Plastische Steifigkeit-----------------------------------------
  !--------------------------------------------------------------------
  cpl(1,g)=cel-(cel*cel)/(cel+kin_ant*SIGN(1,(ARG1-backstress(1,g)))+iso_ant)

*END
!------------------------------------------------------------
*CREATE, fliessbed                      !Fließbedingung , aktualisiert "Backstress" und Fließmoment
                                                        !ARG1=Moment, ARG2=delta phi pl.
  pl_multipl=(cel*ARG2*SIGN(1,(ARG1-backstress(1,g))))
            /(cel+kin_ant*SIGN(1,(ARG1-backstress(1,g)))+iso_ant)! pl. Multiplikator
  inc_plphi=pl_multipl*SIGN(1,(ARG1-backstress(1,g)))   !pl. Verformungsanteil inkrementell
  ges_plphi(1,g)=ges_plphi(1,g)+inc_plphi               !pl. Verformungsanteil gesammt

  !-------Isotroper Verfestigungsanteil---------------------------------
  !--------------------------------------------------------------------
  !miso(1,g)=miso(1,g)+hiso*pl_multipl                  !linear

  miso(1,g)=miso(1,g)+betta*(dalpha-miso(1,g))*pl_multipl + eiso*pl_multipl!exponentiell

  mfliess(1,g)=mfliess0+miso(1,g)                       !neues Fließmoment

  !---------Kinematischer Verfestigungsanteil, Melan-Prager-----------
  !-------------------------------------------------------------------
  !backstress(1,g)=backstress(1,g)+hkin*inc_plphi       !linear

  backstress(1,g)=backstress(1,g)+kinc*inc_plphi-kingamma*backstress(1,g)*pl_multipl!Armstrong Frederick

  !---------Fließbedingung--------------------------------------------
  !-------------------------------------------------------------------
  fliess(1,g)=ABS(ARG1-backstress(1,g))- mfliess(1,g)

*END
!------------------------------------------------------------
*CREATE, rel                              !Elastischer Anteil, ARG1 = Moment, ARG2 = delta Moment

  prerel=(mfliess(1,g)-ABS(ARG1-backstress(1,g)))/ABS(ARG2)
  *IF,mfliess(1,g),EQ,ABS(ARG1-backstress(1,g)+prerel*ARG2),THEN
        rel=prerel
  *ELSE
        rel=(mfliess(1,g)+ABS(ARG1-backstress(1,g)))/(-ABS(ARG2))
  *ENDIF

*END
!------------------------------------------------------------

*CREATE, itermom                          !Aufbringen des Residualmoments
  /SOLU                                   !Löschen der vorherigen Lasten
  SFEDELE,ALL,1,PRES
  FDELE,ALL,ALL
  F,N1,MZ,+dR_n(1,1)
  F,N2,MZ,-dR_n(1,1)
  F,N3,MZ,+dR_n(1,2)
  F,N4,MZ,-dR_n(1,2)
  SAVE
  SOLVE
  FINISH
```

```
*END
!-------------------------------------------------

!-------------------------------------------------
!-----------Anfangszustand------------------------
!-------------------------------------------------
*DIM, resvec ,TABLE, ls *( iter+numsub ) ,5* gel          ! Tabelle: Schritt , Moment, Verdrehung

*DO, g ,1 , gel
        resvec (1 ,g*5-2) = t_mom(1 ,g)
        resvec (1 ,g*5-1) = t_phi (1 ,g)
        resvec (1 ,g*5) = t_w(1 ,g)

        *USE, fliessbed ,t_mom(1 ,g) ,dt_phipl (1 ,g) ! Ausgabe: Wert der Fließfunktion F
        t_F (1 ,g)=fliess (1 ,g)

        feders (1 ,g) = cel                          ! Startet mit der elastischen Federsteifigkeit
*ENDDO

!-----------------------------------------------
!------Starten vom Preprocessor---------
!-----------------------------------------------
/PREP7

! Material Definition
!---------------------
MP,EX,1 ,emodul
MP,NUXY,1 ,nue

! Elementtyp Definition
!----------------------
ET,1 ,BEAM3, , , , , ,1                  ! Stabelement
ET,2 ,MATRIX27, , ,4                     ! Matrixelement für die Verbindung

! Querschnitts Definition (Real Konstante)
-----------------------------
R,1 , bflaeche , bträghm , bqshoehe     ! Balken
R,2 , sflaeche , sträghm , sqshoehe     ! Stütze

*DO, g ,1 , gel
        R, g+2                           ! Federsteifigkeiten für die Verbindungen
        RMODIF, g+2,51, feders (1 ,g)
        RMODIF, g+2,57,- feders (1 ,g)
        RMODIF, g+2,78, feders (1 ,g)
*ENDDO

! Geometrie Eingabe
!-------------------
! Eingabe der Eckpunkte
K,1 ,0 ,0
K,2 ,0 , slang
K,3 ,0 , slang
K,4 , blang , slang
K,5 , blang , slang
K,6 , blang ,0
! Eingabe der Linien
L,1 ,2
L,3 ,4
L,5 ,6

! Erzeugen des Netzes
!---------------------
! Balkenelement
TYPE,1                                   ! Waehlen von ElementTyp und Material
MAT,1
REAL,1
KSEL,S,KP, ,3 ,4                         ! Generiere Balken
LSLK,S,1
LESIZE,ALL,0.5                           ! Elementgröße 0.5m
LMESH,ALL
KSEL,ALL
LSEL,ALL

```

```
! Stützenelemente
TYPE,1                          !Waehlen von ElementTyp und Material
MAT,1
REAL,2
KSEL,S,KP,,1,2                  !Generiere Stütze links
LSLK,S,1
LESIZE,ALL,0.5                  !Elementgröße 0.5m
LMESH,ALL
KSEL,ALL
LSEL,ALL
KSEL,S,KP,,5,6                  !Generiere Stütze rechts
LSLK,S,1
LESIZE,ALL,0.5                  !Elementgröße 0.5m
LMESH,ALL
KSEL,ALL
LSEL,ALL

!Federelement
TYPE,2                          !Verbindung 1
REAL,3
KSEL,S,KP,,2,3                  !Selektieren der Federknoten
NSLK,S
EINTF,,,                        !Erzeugt ein Element zwischen zwei aufeinanderliegenden Knoten
KSEL,ALL
NSEL,ALL

TYPE,2                          !Verbindung 2
REAL,4
KSEL,S,KP,,4,5                  !Selektieren der Federknoten
NSLK,S
EINTF,,,                        !Erzeugt ein Element zwischen zwei aufeinanderliegenden Knoten
KSEL,ALL
NSEL,ALL

! Setzen der Randbedingungen
!--------------------------------
KSEL,S,KP,,1,6,5                !Beide Auflager sind unverschieblich
NSLK,S
D,ALL,UX,0
D,ALL,UY,0
KSEL,ALL
NSEL,ALL

KSEL,S,KP,,6                    !rechtes Auflager ist Eingespannt
NSLK,S
D,ALL,ROTZ,0
KSEL,ALL
NSEL,ALL

KSEL,S,KP,,2,3                  !Verschiebungen der partiell-resistenten Verb. hängen zusammen
NSLK,S
CP,1,UX,ALL
CP,2,UY,ALL
KSEL,ALL
NSEL,ALL

KSEL,S,KP,,4,5                  !Verschiebungen der partiell-resistenten Verb. hängen zusammen
NSLK,S
CP,3,UX,ALL
CP,4,UY,ALL
KSEL,ALL
NSEL,ALL

! Selektiere Knoten und Elemente für die Ausgabe
!------------------------------------------------
KSEL,S,KP,,2                    !Selektieren der Knoten N für die Ausgabe
NSLK,S
*GET,N1,NODE,,NUM,MIN
KSEL,ALL
NSEL,ALL

KSEL,S,KP,,3
NSLK,S
```

```
*GET,N2,NODE,,NUM,MIN
KSEL,ALL
NSEL,ALL

KSEL,S,KP,,4
NSLK,S
*GET,N3,NODE,,NUM,MIN
KSEL,ALL
NSEL,ALL

KSEL,S,KP,,5
NSLK,S
*GET,N4,NODE,,NUM,MIN
KSEL,ALL
NSEL,ALL

LSEL,S,LINE,,2                    !Selektiere die Elemente E für die Ausgabe
ESLL,S
*GET,E1,ELEM,,NUM,MIN
LSEL,ALL
ESEL,ALL

LSEL,S,LINE,,3
ESLL,S
*GET,E2,ELEM,,NUM,MIN
LSEL,ALL
ESEL,ALL

SAVE
FINISH

!----------------------------------------------
!-------Verlassen des Preprocessors-------
!----------------------------------------------


!--------------------------------------------------------
!--------------Schleife über Lastschritte-------------
!--------------------------------------------------------
  *DO,i,1,ls
  !------------------------------------------------------
  !-------------Lösen eines Lastschrittes--------------
  !------------------------------------------------------

  *IF,SIGN(1,lastschritte(1,i)),NE,SIGN(1,gleichl),THEN
  /PREP7                                  !Öffnen des Preprozessors
  *DO,g,1,gel
        feders(1,g) = cel                 !Steifigkeit bei Entlastung
        R,g+2
        RMODIF,g+2,51,feders(1,g)
        RMODIF,g+2,57,-feders(1,g)
        RMODIF,g+2,78,feders(1,g)

        KSEL,S,KP,,g*2,g*2+1
        NSLK,S
        ESLN,ALL,1
        EMODIF,ALL,REAL,2+g
        KSEL,ALL
        NSEL,ALL
        ESEL,ALL
  *ENDDO
  SAVE
  FINISH
  *ENDIF

  /SOLU                                   !Starten des Solution Processors
  ! Setzen der Belastung (Gleichlast)
  !----------------------------------------------
  SFEDELE,ALL,1,PRES
  FDELE,ALL,ALL

  gleichl=lastschritte(1,i)
  LSEL,S,LINE,,1                          !Seitliche Belastung
```

```
ESLL,S
SFBEAM,ALL,1,PRESS,gleichl,gleichl
LSEL,ALL
ESEL,ALL

SAVE
SOLVE
FINISH                                    !Verlassen des Solution Processors


/POST1                                    !Starten des Postprocessors
!Momentenlinie plotten
!--------------------------
/PBC,ALL,,1                               !sichtbarmachen der Randbedingungen
                                          !Zeichnen der Momentenlinie
ETABLE,moment1,SMISC,6                    !Momente an den Knoten i
ETABLE,moment2,SMISC,12                   !Momente an den Knoten j
PLLS,moment1,moment2                      !Zeichnen der Momentenline

!Ergebnisse herausholen Verformungen des Systems
!----------------------------
*GET,dt_phij(1,1),NODE,N1,ROT,Z           !Ausrechnen der Verformungen
*GET,dt_phii(1,1),NODE,N2,ROT,Z
*GET,dt_phij(1,2),NODE,N3,ROT,Z
*GET,dt_phii(1,2),NODE,N4,ROT,Z

*GET,dt_mom_i(1,1),ELEM,E1,ETAB,moment1!Moment zufolge der Belastung
*GET,dt_mom_i(1,2),ELEM,E2,ETAB,moment1

*GET,dt_w(1,1),NODE,N2,U,X                !Horizontalverschiebungen
*GET,dt_w(1,2),NODE,N3,U,X

*DO,g,1,gel
      dt_phi_i(1,g) = dt_phii(1,g) - dt_phij(1,g)!Relativverdrehung
      tudt_phi_i(1,g) = t_phi(1,g) + dt_phi_i(1,g)
      tudt_mom_i(1,g) = t_mom(1,g) + dt_mom_i(1,g)
      tudt_w(1,g) = t_w(1,g) + dt_w(1,g)
*ENDDO
FINISH                                    !Verlassen des Postprocessors

num=num+1
*DO,g,1,gel
      *USE,fliessbed,tudt_mom_i(1,g),0            !Fließbedingung, Ausgabe=fliess
      tudt_F_i(1,g) = fliess(1,g)

      *IF,tudt_F_i(1,g),LE,0,THEN                 !Wenn die Fließbedingung<0: elastischer Bereich
         tudt_mom_ges(1,g) = tudt_mom_i(1,g)      !Moment zufolge der Verformung
         tudt_phi_ges(1,g) = tudt_phi_i(1,g)
         t_F(1,g) = tudt_F_i(1,g)
         t_mom_n(1,g) = tudt_mom_i(1,g)           !Moment zufolge der Belastung

        Ls_zw(1,g) = Lsges + lastschritte(1,i)    !Werte in Tabelle: Schritt, Moment, Verdrehung
        resvec(1+num,g*5-4) = Ls_zw(1,g)
        resvec(1+num,g*5-3) = 0
        resvec(1+num,g*5-2) = tudt_mom_ges(1,g)
        resvec(1+num,g*5-1) = tudt_phi_ges(1,g)
        resvec(1+num,g*5) = t_w(1,g)

      *ELSEIF,tudt_F_i(1,g),GT,0                  !Fließbedingung >0: plastischer Bereich
         *IF,t_F(1,g),EQ,0,THEN                   !vorheriger Zustand plastisch: kein Übergang
              rel = 0                             !Der elastische Anteil ist Null
         *ELSE                                    !vorheriger Zustand elastisch: Übergangsbereich
              *USE,rel,t_mom(1,g),dt_mom_i(1,g)   !Berechnen des elastischen Anteils
         *ENDIF

         dt_phiel = rel*dt_phi_i(1,g)             !Elastischer Anteil
         dt_phipl(1,g) = (1-rel)*dt_phi_i(1,g)
         dt_momel = rel*dt_mom_i(1,g)
         tudt_phi_el(1,g) = t_phi(1,g) + dt_phiel
         tudt_mom_el(1,g) = t_mom(1,g) + dt_momel
         Ls_zw(1,g) = Lsges + lastschritte(1,i)*rel
         t_w_zw(1,g) = t_w(1,g) + rel*dt_w(1,g)
```

```
            resvec(num+1,g*5-4) = Ls_zw(1,g)
            resvec(1+num,g*5-3) = 0
            resvec(1+num,g*5-2) = tudt_mom_el(1,g)
            resvec(1+num,g*5-1) = tudt_phi_el(1,g)
            resvec(1+num,g*5) = t_w_zw(1,g)

            !Numerisches Verfahren (Euler-Cauchy)
            !----------------------------------------------------
            nsubinc = numsub
            dt_phi_subinc = dt_phipl(1,g)/nsubinc
            tudt_phi_ges(1,g) = tudt_phi_el(1,g)
            tudt_mom_ges(1,g) = tudt_mom_el(1,g)

            *USE,fliessbed,tudt_mom_ges(1,g),0          !Mitführen der Werte
            *USE,pl_gel,tudt_mom_ges(1,g)               !Startwert für die Berechnung

            *DO,sinc,1,nsubinc
                dt_subinc_mom = cpl(1,g)*dt_phi_subinc
                tudt_mom_ges(1,g)= tudt_mom_ges(1,g)+ dt_subinc_mom
                tudt_phi_ges(1,g)=tudt_phi_ges(1,g)+dt_phi_subinc

                num=num+1

                resvec(num+1,g*5-4) = Ls_zw(1,g)
                resvec(num+1,g*5-2) = tudt_mom_ges(1,g)
                resvec(num+1,g*5-1) = tudt_phi_ges(1,g)
                resvec(num+1,g*5) = t_w_zw(1,g)

                *USE,fliessbed,tudt_mom_ges(1,g),dt_phi_subinc  !Mitführen der Werte
                *USE,pl_gel,tudt_mom_ges(1,g)           !Rechnet neues Cpl aus
            *ENDDO

            t_mom_n(1,g) = tudt_mom_i(1,g)              !Moment zufolge der Belastung
            t_F(1,g) = 0
        *ENDIF
    *ENDDO
    !----------------------------------------------------
    !-----------Newton Raphson Iterationen-------------
    !----------------------------------------------------
    *DO,n,1,iter                                        !Iteration
        fehler = 0
        *DO,g,1,gel
            *IF,t_F(1,g),EQ,0,THEN
                feders(1,g) = cpl(1,g)                  !plast. Bereich
                dR_n(1,g)=-t_mom_n(1,g)+tudt_mom_ges(1,g)!Residualmoment
                fehler = fehler + ABS(dR_n(1,g))        !Summe der Residualkräfte = Fehler
            *ELSE
                feders(1,g) = cel                       !elast. Bereich
            *ENDIF
        *ENDDO

        /PREP7                                          !Öffnen des Preprozessors
        *DO,g,1,gel
            R,g+2                                       !Federsteifigkeit
            RMODIF,g+2,51,feders(1,g)
            RMODIF,g+2,57,-feders(1,g)
            RMODIF,g+2,78,feders(1,g)

            KSEL,S,KP,,g*2,g*2+1                        !Selektiere das jeweilige Gelenk
            NSLK,S
            ESLN,ALL,1
            EMODIF,ALL,REAL,g+2
            KSEL,ALL
            NSEL,ALL
            ESEL,ALL
        *ENDDO
        SAVE
        FINISH                                          !Verlassen des Preprozessors

        *IF,fehler,LE,abbr,EXIT                         !Abbruchbedingung, abbr Nm

        *USE,itermom                                    !Aufbringen des Residualmoments
```

```

        /POST1
        ETABLE, moment_n , SMISC , 6                          !Momente zufolge der Belastung
        *GET, dt_phij (1 ,1) ,NODE, N1 ,ROT, Z                !Verformungsberechnung
        *GET, dt_phii (1 ,1) ,NODE, N2 ,ROT, Z
        *GET, dt_phij (1 ,2) ,NODE, N3 ,ROT, Z
        *GET, dt_phii (1 ,2) ,NODE, N4 ,ROT, Z
        *GET, dt_mom_n (1 ,1) ,ELEM, E1 ,ETAB, moment_n       !Berechnetes Moment
        *GET, dt_mom_n (1 ,2) ,ELEM, E2 ,ETAB, moment_n
        *GET, dt_w (1 ,1) ,NODE, N2 ,U,X                      !Horizontalverschiebungen
        *GET, dt_w (1 ,2) ,NODE, N3 ,U,X
        SAVE
        FINISH

        num = num + 1

        *DO, g ,1 , gel
           resvec(1+num, g*5-4) = Ls_zw(1 ,g)                 !Werte in Tabelle schreiben
           resvec(1+num, g*5-3) = n
           dt_phi(1 ,g) = dt_phii(1 ,g) - dt_phij(1 ,g)       !Relativverdrehung
           tudt_phi_ges(1 ,g) = tudt_phi_ges(1 ,g) + dt_phi(1 ,g)
           t_mom_n(1 ,g) = t_mom_n(1 ,g) + dt_mom_n(1 ,g)     !Berechnetes Moment
           tudt_w(1 ,g) = tudt_w(1 ,g) + dt_w(1 ,g)

           *USE, fliessbed , t_mom_n(1 ,g) ,0                 !Fließbedingung
           tudt_F_n(1 ,g) = fliess(1 ,g)

           !Moment zufolge der Verformung
           !----------------------------------------------
           *IF , tudt_F_n(1 ,g) ,LE,0 ,THEN                   !Wenn die Fließbedingung <0: el. Bereich
                tudt_mom_ges(1 ,g) = tudt_mom_ges(1 ,g) + dt_mom_n(1 ,g)
                t_F(1 ,g) = tudt_F_n(1 ,g)
                dt_phipl(1 ,g) = 0
           *ELSE                                              !Wenn die Fließbedingung >0: pl. Bereich
                *IF , t_F(1 ,g) ,EQ,0 ,THEN                   !vorher plastisch: kein Übergang
                   rel = 0                                    !Der elastische Anteil ist Null
                *ELSEIF, t_F(1 ,g) ,LT,0                      !Übergangsbereich elastisch-plastisch
                   *USE, pl_gel , tudt_mom_ges(1 ,g)
                   *USE, rel , tudt_mom_ges(1 ,g) ,dt_mom_n(1 ,g)!Berechnen des elastischen Anteils
                *ENDIF

                dt_phiel = rel*dt_phi(1 ,g)                   !Elastische Verformungen
                dt_phipl(1 ,g) = (1-rel)*dt_phi(1 ,g)         !Plastische Verformungen
                dt_momel = rel*dt_mom_n(1 ,g)                 !Moment zufolge der Verformung

                !Numerisches Verfahren (Euler-Cauchy)
                !-----------------------------------------------------------------------------
                nsubinc = numsub
                dt_phi_subinc = dt_phipl(1 ,g)/nsubinc
                tudt_mom_ges(1 ,g) = tudt_mom_ges(1 ,g) + dt_momel
                *DO, sinc ,1 , nsubinc
                   dt_subinc_mom = cpl(1 ,g)*dt_phi_subinc
                   tudt_mom_ges(1 ,g) = tudt_mom_ges(1 ,g) + dt_subinc_mom
                   *USE, fliessbed , tudt_mom_ges(1 ,g) , dt_phi_subinc!Mitführen der Werte
                   *USE, pl_gel , tudt_mom_ges(1 ,g)
                *ENDDO
                !-----------------------------------------------------------------------------
                t_F(1 ,g) = 0
           *ENDIF

           resvec(1+num, g*5-2) = tudt_mom_ges(1 ,g)
           resvec(1+num, g*5-1) = tudt_phi_ges(1 ,g)
           resvec(1+num, g*5) = t_w_zw(1 ,g)
        *ENDDO
  *ENDDO
  !----------------------------------------------
  !---Gesamtergebnis für diesen Lastschritt---
  !----------------------------------------------
   Lsges = Lsges + lastschritte(1 ,i)
   *DO, g ,1 , gel
        t_mom(1 ,g) =  tudt_mom_ges(1 ,g)                     !Gesamtergebnis für den Lastschritt
        t_phi(1 ,g) =  tudt_phi_ges(1 ,g)
```

```
            t_w(1,g) = tudt_w(1,g)
            resvec(1+num,g*5) = t_w(1,g)
            resvec(1+num,g*5-4) = Lsges

            resvec(1+num,g*5-2) = t_mom(1,g)
            resvec(1+num,g*5-1) = t_phi(1,g)
    *ENDDO
*ENDDO

!--------------------------------------------
!----------Ergebnisausgabe------------
!--------------------------------------------

!Kurvenplot
!--------------------
/COLOR,CURVE,BLUE

/AXLAB,x, w [m]
/AXLAB,y, q [N/M]
*VPLOT,resvec(1,10),resvec(1,6)

/AXLAB,x,WINKEL IN RAD
/AXLAB,y,MOMENT IN NM
*VPLOT,resvec(1,9),resvec(1,8)

!"Ergebnis"-Output
!--------------------

/OUT,ergebnis,dat
/COM,--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
/COM,                                                    ERGEBNISSE
/COM,--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
/COM, -Belastung- -Iter. Schritt- -Moment l- -Verdr. l- -Verf. l- -Belastung- -Iter. Schritt- -Moment r-
/COM,--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
*VWRITE,resvec(1,1),resvec(1,2),resvec(1,3),resvec(1,4),resvec(1,5),resvec(1,6),resvec(1,7),resvec(1,8),r
(F10.0,' ',F10.0,' ',F15.2' ',F10.8' ',F10.8' ',F10.0,' ',F10.0,' ',F15.2' ',F10.8' ',F10.8)
/COM,--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
/OUT
```

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Literaturverzeichnis

[1] ANSYS Release 10.0. www.ansys.com, 2005. Lizenz: ANSYS University Adyanced.

[2] J. Betten. *Kontinuumsmechanik*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1993. ISBN 3-540-56646-5.

[3] W. Brauch. *Mathematik für Ingenieure*. B.G. Teubner Verlag, 10 edition, 2003. ISBN 3-519-56500-5.

[4] EC8. *Eurocode 8*, 2003.

[5] FEMA-350 Federal Emergency Management Agency. Recommended seismic design criteria for new steel moment-frame buildings. Technical report, SAC Joint Venture, Juni 2000.

[6] S. Kaliszky. *Plasticity, Theory and Engineering Applications*. Elsevier Science Publishers, 1989. ISBN 0-444-98891-2.

[7] R. Mahnken. Improved implementation of an algorithm for non-linear isortopic/kinematic hardening in elastoplasticity. *Communication in Numerical Methods in Engineering*, 15:745–754, 1999.

[8] MATLAB 7.1.0.246 (R14). www.mathworks.com, 2005. Service Pack 3, The MathWorks, Inc.

[9] W.F. Chen und D.J. Han. *Plasticity for Structural Engineers*. Springer-Verlag, 1 edition, 1988. ISBN 3-540-96711-7.

[10] G. Beer und J.O. Watson. *Introduction to Finite and Boundary Element Methods for Engineers*. John Wiley & Sons, Ltd, 1992. ISBN 0-471-92813-5.

[11] E. Mele und L. Calado. Cyclic behavior of steel beam-to-column joints: Governing parameters of welded and bolted connections. *Journal of Structural Engineering*, pages 1301–1311, Oktober 2003.

[12] N. Ohno und M. Abdel-Karim. Uniaxial ratcheting of 316fr steel at room temperature - part ii: Constitutive modeling and simulation. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 122: 35–41, 2000.

[13] L. Dunai und N. Kovacs und L. Calado. Analysis of bolted end-plate joints: cyclic test and standard approach. *Connections in Steel Structures V - Amsterdam*, pages 191–200, Juni 2004.

[14] E. P. Popov und S. M. Takhirov. Experimental study of large seismic steel beam-to-column connections. Technical report, Pacific Earthquake Engineering Research Center, November 2002.

[15] E. A. Sumner und T. M. Murray. Behavior of extended end-plate moment connections subject to cyclic loading. *Journal of Structural Engineering*, pages 501–508, April 2002.

[16] X.W. Gao und T.G. Davies. *Boundary Element Programming in Mechanics*. Cambridge University Press, 2002. ISBN 0-521-77359-8.

[17] M. Jirasek und Z. Bazant. *Inelastic Analysis of Structures*. John Wiley & Sons, Ltd, 2002. ISBN 0-471-98716-6.