

**Markus Ableidinger Bakk. techn.**

# **Varianzoptimales Hedging in unvollständigen Marktmodellen**

**MASTERARBEIT**

**zur Erlangung des akademischen Grades einer/s  
Diplom-Ingenieur/in**

**Finanz- und Versicherungsmathematik**



**Technische Universität Graz**

**Betreuer/in:  
Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Wolfgang Müller**

**Institut für Statistik**

**Graz, im Dezember 2012**

## EIDESSTATTLICHE ERKLÄRUNG

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Graz, am .....  
.....  
(Unterschrift)

## STATUTORY DECLARATION

I declare that I have authored this thesis independently, that I have not used other than the declared sources/resources, and that I have explicitly marked all material which has been quoted either literally or by content from the used sources.

.....  
date  
.....  
(signature)

## Zusammenfassung

Die charakterisierende Eigenschaft von unvollständigen Finanzmarktmodellen ist die Existenz von Forderungen, deren Auszahlungsprozess nicht durch eine selbstfinanzierende Handelsstrategie (Hedge) nachgebildet werden kann. Auf Verkäuferseite besteht naturgemäß Interesse daran zur Absicherung einer solchen Forderung eine Handelsstrategie auszuwählen, die einerseits das zu verwendende Kapital, andererseits das verbleibende Restrisiko in Grenzen hält.

Ein naheliegendes Kriterium ist den lokalen bzw. globalen quadratischen Abstand zwischen dem Wertprozess einer Handelsstrategie und der Auszahlung der Forderung zu betrachten und eine Handelsstrategie zu wählen, die jenen Abstand minimiert. Die Untersuchung sowohl diskreter als auch zeitstetiger Marktmodelle auf die Existenz und Berechenbarkeit derartiger varianzminimierender Handelsstrategien steht im Mittelpunkt dieser Diplomarbeit.

Grundlage dafür bilden die Arbeiten “Variance-Optimal Hedging in Discrete Time” von M. Schweizer (Mathematics of Operations Research 20 1995, Seite 1-32), “Financial Modelling with Jump Processes” von R. Cont und P. Tankov (Chapman and Hall, CRC Press 2004) und “Variance-Optimal Hedging for Processes with Stationary Independent Increments” von F. Hubalek, J. Kallsen and L. Krawczyk (Annals of Applied Probability 2 2006, Seite 853-885).

## Abstract

The existence of contingent claims with a payoff process that cannot be replicated by a self-financing trading strategy (hedge) is the characteristic feature of incomplete models on the capital market. Obviously, vendors are interested in hedging strategies, which both minimize the necessary capital and the residual risk.

Minimizing the global (or local) quadratic distance between the value process of a hedging strategy and the payoff of the claim is a natural choice as an optimization criteria. Proofing the existence and calculating so called variance-optimal hedging strategies for discrete and continuous time processes is the overall aim of this master thesis.

This work is mainly based on “Variance-Optimal Hedging in Discrete Time” by M. Schweizer (Mathematics of Operations Research 20 1995, page 1-32) , “Financial Modelling with Jump Processes” by R. Cont and P. Tankov (Chapman and Hall, CRC Press 2004) and “Variance-Optimal Hedging for Processes with Stationary Independent Increments” by F. Hubalek, J. Kallsen and L. Krawczyk (Annals of Applied Probability 2 2006, page 853-885).

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Zeitdiskrete Modelle</b>	<b>1</b>
1.1	Einleitung . . . . .	1
1.2	Mean-Variance Hedging . . . . .	6
1.3	Lokal-Risikominierende Handelsstrategien . . . . .	17
1.4	Fourieranalytische Methoden zur Berechnung der varianzoptimalen Hedge	29
<b>2</b>	<b>Zeitstetige Modelle</b>	<b>40</b>
2.1	Mean-Variance Hedging in zeitstetigen Finanzmarktmodellen . . . . .	40
2.2	Exponentielle Lévy Modelle - Martingalfall . . . . .	44
2.3	Allgemeine exponentielle Lévy Modelle . . . . .	58
<b>3</b>	<b>Anhang</b>	<b>66</b>
3.1	Zeitdiskrete Martingale . . . . .	66
3.2	Lévy Prozesse . . . . .	68
3.3	Fourieranalyse . . . . .	71
3.4	$\mathcal{E}$ -Martingale . . . . .	72
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>74</b>

# Kapitel 1

## Zeitdiskrete Modelle

### 1.1 Einleitung

Die ersten Ansätze zur mathematischen Modellierung des Aktien - und dem damit untrennbar verbundenen Derivatmarktes, waren die Arbeiten des französischen Mathematikers Louis Bachelier zu Beginn des 20. Jahrhunderts. In seiner "Theorie de la speculation" entwickelte Bachelier einerseits ein umfassendes Konzept zur Modellierung von Aktienkursen durch stochastische Prozesse, im speziellen der Brownschen Bewegung, andererseits Bepreisungsvorschriften für die Grundprodukte des Derivatmarktes. Jene zwei Probleme stellen auch heute noch die zentralen Herausforderungen der Finanzmathematik dar, nicht zu unrecht wird die Publikation als Geburtsstunde der modernen Finanzmathematik bezeichnet. So visionär Bacheliers Überlegungen waren, so wenig ausgereift war die verwendete Theorie. Hilberts Kritik am wackligen Fundament der Mathematik galt im speziellen für die Wahrscheinlichkeitstheorie, ein Problem das erst bis Ende der 30er Jahre durch die Axiomatisierung derselben und dem Bezug zur Maßtheorie behoben werden würde. Als federführend sind hier Nikolajewitsch Kolmogorow und Paul Lévy zu erwähnen, Lévy selbst lehnte Bacheliers Arbeiten als unwissenschaftlich ab. Eine Renaissance erfuhr Bacheliers Theorie in den späten 50er Jahren, Bachelier erlebte die späte Anerkennung selbst nicht mehr. Sie bildete die Grundlage für die Entwicklung des Black-Scholes-Modells 1973. Neben dem Novum, dass nun ein zeitstetiges mathematisches Modell für die Entwicklung von Aktienpreisen und einer darauf aufbauenden Bepreisungstheorie zur Verfügung stand, erfüllt das Black-Scholes Modell zwei höchst angenehme Eigenschaften: es ist (unter gewissen Einschränkungen) arbitragefrei und vollständig. Die Arbitragefreiheit als sowohl ökonomisch als auch mathematisch notwendige Eigenschaft eines Finanzmarktmodells ist unbestritten und findet ihre mathematische Beschreibung durch den ersten Fundamentalsatz der Preistheorie, der die Arbitragefreiheit mit der Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes verknüpft. Die Eigenschaft der Vollständigkeit ist heuristisch gesagt die Möglichkeit, eine Forderung durch die zugrunde liegende Aktie sowie einem risikolosen Bond durch eine selbstfinanzierendes Portfolio nachzubilden, und wird im zweiten Fundamentalsatz der Preistheorie beschrieben. Vollständigkeit

ist allerdings, obwohl zweifelsohne eine wünschenswerte Eigenschaft, eher der Spezialfall als der Regelfall. Die gerechtfertigte Kritik am Black Scholes Modell führte in Folge zu neuen Marktmodellen, erwähnt seien hier z.B. das Heston-Modell, Exponentielle Lévy Modelle oder stochastische Volatilitätsmodelle; viele dieser Modelle sind nicht vollständig, enthalten also Risikoterme die sich durch Hedging nicht kompensieren lassen. Der mathematische Grund für dieses Phänomen liegt darin, dass sich auch vollständige Marktmodelle durch die Ergänzung kleiner Fehlerterme als unvollständig erweisen - die Eigenschaft der Vollständigkeit ist ganz im Gegensatz zur Arbitragefreiheit höchst empfindlich gegen den Einfluss von Störtermen. Neben diesen mathematischen Problemen erweist sich die Eigenschaft der Vollständigkeit als ökonomisch fragwürdig: die Replizierbarkeit der Derivate liefert beiden Vertragsparteien zumindest theoretisch die Möglichkeit sich durch Hedging risikolos zu halten. Es stellt sich die Frage nach der Sinnhaftigkeit des Derivatmarktes; dieser eröffnet keine neuen Möglichkeiten, die nicht durch Aktie und Bond bereits realisierbar wären.

Betrachtet man den Finanzmarkt als unvollständig, wandelt sich das Problem des Hedging grundlegend: Eine Replizierung der Forderung ist nicht möglich, die Verkäuferseite steht nun einerseits vor dem Problem einen fairen Preis für das Produkt festzulegen, und andererseits ein teilweise replizierendes Portfolio zu wählen, um das eigene Risiko gering zu halten. Diese Handelsstrategie kann nun nach den verschiedensten Optimalitätskriterien wie die Minimierung einer vorgegebenen Nutzenfunktion oder der Entropie eines Maßes ausgewählt werden. Im Zentrum dieser Arbeit stehen sogenannte varianzoptimale Handelsstrategien, repräsentiert durch das Konzept des mean-variance Hedgings und des lokal risikominimierenden Hedgens. Das Konzept des mean-variance Hedgings verfolgt den klassischen mathematischen Ansatz den quadratischen Abstand zwischen dem zu replizierenden Gut sowie dem Wert der von uns gewählten Handelsstrategie zum Auszahlungszeitpunkt zu minimieren. Das lokal risikominimierende Hedgen erweitert die Klasse der möglichen Handelsstrategien und erlaubt Geldzuflüsse; als optimal wird jene Handelsstrategie angesehen, die die quadratischen Kosten die dabei entstehen lokal minimiert. Der erste Teil der Arbeit und behandelt zeitdiskrete Finanzmarktmodelle, im zweiten Teil der Arbeit werden wir zeitstetige Finanzmarktmodelle, im Speziellen exponentielle Lévy-Modelle betrachten.

Abschnitt 1.1 behandelt unsere grundsätzlichen Annahmen und Definitionen des betrachteten zeitdiskreten Finanzmarktmodells.

Im Abschnitt 1.2 führen wir das mean-variance Problem ein; wir behandeln Fragen der Existenz von Lösungen und analysieren die Struktur der optimalen Handelsstrategien. Abschnitt 1.3 behandelt einerseits das lokal-risikominimierende Problem, wir erläutern Fragen der Existenz von Lösungen sowie deren Struktur und betrachten Zerlegungen der nachzubildenden Forderungen. Weiters beschäftigen wir uns mit dem Begriff des minimalen Martingalmaßes und betrachten auch hier Fragen der Existenz und Eindeutigkeit. Den Schlusspunkt dieses Abschnitts bildet die Analyse der Zusammenhänge zwischen den Lösungen des mean-variance Problems und des lokal risikominimierenden Problems sowie eine Betrachtung sogenannter signierter Martingalmaße als Preisungsvorschrift für Forderungen. Die numerische Berechnung varianzoptimaler und

lokal risikominimierender Handelsstrategien über die verallgemeinerte Fouriertransformierte bildet den Inhalt von Abschnitt 1.4. Im Abschnitt 2.1 werden wir die Konzepte des varianzoptimalen Hedgens auf zeitstetige Finanzmarktmodelle anwenden, und Lösungsdarstellungen der Handelsstrategien in exponentiellen Levymodellen ermitteln.

Zu Beginn treffen wir eine Reihe von vereinfachenden Annahmen. Diese setzen wir in allen Kapiteln als erfüllt voraus.

**Annahme 1.** Unser Finanzmarkt erfülle folgende Eigenschaften:

- Die Investorin beeinflusst die Marktpreise durch ihr Handeln nicht.
- Es fallen keine Transaktionskosten an.

*Bemerkung 1.1.* Die erste Annahme ist zumindest für eine im Bezug auf das Handelsvolumen kleinen Marktteilnehmerin und einen liquiden Markt denkbar, die zweite Annahme wird sich in der Realität nicht widerspiegeln und wird zur Vereinfachung des Modells getroffen.

**Definition 1.2.** Wir betrachten im Folgenden ein  $T$ -Periodenmodell mit den Handelszeitpunkten  $\{0, 1, \dots, T\}$ ,  $T \in \mathbb{N}$ . Dem Modell liegt ein Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  und eine den Informationsverlauf beschreibende Filtration  $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \{0, \dots, T\}}$  zugrunde. Es gilt dabei:

$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\},$$

d.h. zum Zeitpunkt 0 ist keine Information über das Zufallsexperiment bekannt. Das Modell beinhaltet zwei Finanzgüter. Den "risikolose" Bond mit Preisprozess  $S^0 = (S_t^0)_{0 \leq t \leq T}$  und eine risikobehaftete Aktie  $S^1 = (S_t^1)_{0 \leq t \leq T}$ . Beide Prozesse sind  $\mathcal{F}$ -adaptiert. Wir setzen weiter voraus, dass  $S^0$  zu allen Zeitpunkten strikt positiv ist und bezeichnen mit  $S = (S^0, S^1)$  den Preisprozess sowie mit  $\tilde{S} = \frac{1}{S^0}(S^0, S^1) = (1, \tilde{S}^1)$  den diskontierten Preisprozess. Dabei ist  $\tilde{S}^1 = (\tilde{S}_t^1)_{0 \leq t \leq T}$  mit  $\tilde{S}_t^1 = \frac{S_t^1}{S_t^0}$ .

*Bemerkung 1.3.* Das Produkt  $S^0$  dient uns in Folge als Numeraire, die diskontierten Finanzgüter, Wertprozesse usw. werden dabei jeweils mit einer Tilde über dem Symbol gekennzeichnet.

Kommen wir nun zum Grundbaustein unseres mathematischen Problems: Der Investor hält eine Forderung  $H$ , die ihm zum Fälligkeitszeitpunkt (in unserem Fall der Zeitpunkt  $T$ ) eine gewisse Auszahlung (abhängig von einem zugrunde liegenden Finanzprodukt) liefert. Mathematisch beschreiben wir die Forderung wie folgt:

**Definition 1.4.** Eine Forderung  $H$  ist eine  $\mathcal{F}_T$ -messbare, quadratisch integrierbare Zufallsvariable, d.h.

$$H \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P). \tag{1.1}$$

Unser Ziel ist es, diese Forderung durch Handelsstrategien möglichst gut (im Sinne unseres Optimalitätskriteriums) nachzubilden.

**Definition 1.5.** Ein stochastischer Prozess  $(\phi_t)_{t \in \mathcal{T}}$  heißt adaptiert, wenn  $\phi_t$  für jedes  $t \in \{1, \dots, T\}$ -messbar ist.

Ein zeitdiskreter stochastischer Prozess  $(\phi_t)_{t \in \mathcal{T}}$  heißt vorhersagbar, wenn  $\phi_t$  für jedes  $t \in \{1, \dots, T\}$   $\mathcal{F}_{t-1}$ -messbar ist.

Nun können wir die in den Abschnitten 1.2 und 1.3 verwendeten Handelsstrategien definieren:

**Definition 1.6.** Eine Handelsstrategie  $\phi$  ist ein Paar von stochastischen Prozessen  $\phi = ((\phi_t^0, \phi_t^1))_{t \in \{1, \dots, T\}}$ , für die gilt:

- $\phi^0$  ist vorhersagbar.
- $\phi^1$  ist vorhersagbar.

Die Handelsstrategie lässt sich dabei wie folgt interpretieren: Im Intervall  $(t-1, t]$  werden  $\phi_t^0$  Einheiten des Bonds und  $\phi_t^1$  Einheiten der Aktie gehalten. Der Wert der Handelsstrategie zum Zeitpunkt  $t$  vor der Umbildung in ein neues Portfolio wird über den Wertprozess dargestellt.

**Definition 1.7.** Der Wertprozess  $V(\phi)$  einer Handelsstrategie  $\phi = (\phi^0, \phi^1)$  ist definiert als:

$$V_t(\phi) = \langle \phi_t, S_t \rangle = \phi_t^0 S_t^0 + \phi_t^1 S_t^1 \quad t \in \{1, \dots, T\}.$$

Wir setzen zusätzlich

$$V_0(\phi) = \langle \phi_1, S_0 \rangle,$$

$V_0(\phi)$  stellt das Startkapital der Handelsstrategie dar, der Endwert ist über  $V_T(\phi)$  gegeben. Der diskontierte Wertprozess hat die Form

$$\tilde{V}_t(\phi) = (S_t^0)^{-1} V_t(\phi) = \phi_t^0 + \phi_t^1 \tilde{S}_t^1 \quad t \in \{1, \dots, T\}.$$

Neben dem Wert des Portfolios ist für uns vor allem die Wertentwicklung, d.h. die kumulierten Wertänderungen unseres Portfolios interessant. Wir beschreiben diese Entwicklung durch den Wertentwicklungsprozess.

**Definition 1.8.** Der Wertentwicklungsprozess  $G(\phi)$  einer Handelsstrategie  $\phi$  ist definiert als:

$$G_t(\phi) := (\phi \cdot S)_t = \sum_{j=1}^t \langle \phi_j, \Delta S_j \rangle \quad t \in \{0, \dots, T\},$$

insbesondere gilt

$$G_0(\phi) = 0.$$

Dabei bezeichnet  $\Delta S_t = (S_t - S_{t-1})$ . Der diskontierte Wertentwicklungsprozess hat die Form:

$$\tilde{G}_t(\phi) := (\phi \cdot \tilde{S})_t \quad t \in \{0, \dots, T\}$$

*Bemerkung 1.9.* In einem zeitstetigen Finanzmarktmodell ist die kumulierte Wertänderung das stochastische Integral

$$\tilde{G}_t(\phi) = (\phi \cdot \tilde{S})_t = \int_0^t \phi_u d\tilde{S}_u.$$

In der weiteren Betrachtung werden wir uns auf selbstfinanzierende Handelsstrategien beschränken: in jedem Zeitschritt wird das noch vorhandene Kapital reinvestiert, es wird (abgesehen vom Anfangsinvestment  $V_0$ ) weder Geld zugeführt noch abgezogen. Mathematisch lässt sich diese Forderung wie folgt über den Wertprozess beschreiben:

**Definition 1.10.** Eine Handelsstrategie  $\phi = (\phi^0, \phi^1)$  heißt selbstfinanzierend, wenn für den Wertprozess gilt:

$$V_t(\phi) = \langle \phi_{t+1}, S_t \rangle \quad t \in \{1, \dots, T-1\}.$$

Der diskontierte Wertentwicklungsprozess einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie hat die Darstellung:

$$\tilde{G}(\phi)_t = \tilde{V}_t(\phi) - \tilde{V}_0(\phi) = \sum_{j=1}^t \phi_j^1 \Delta \tilde{S}_j^1 \quad t \in \{1, \dots, T\}.$$

*Bemerkung 1.11.* Ist  $\phi$  selbstfinanzierend, dann ist  $V_0(\phi) = \langle \phi_1, S_0 \rangle$  das zum Aufbau von  $\phi$  benötigte Anfangskapital;  $\phi$  ist durch die Angaben von  $\phi^1$  und einen Anfangswert  $V_0 \in \mathbb{R}$  eindeutig festgelegt.

## 1.2 Mean-Variance Hedging

In diesem Abschnitt werden wir das Konzept des mean-variance Hedgings einführen. Wir folgen dabei den Ausführungen von [1], *Kapitel 1 und 2*. Wir widmen uns einer eingehenden Analyse der Problemstellung, behandeln Fragen nach der Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung und konstruieren ein signiertes Maß zur Bepreisung der Forderung.

Beginnen wir mit den grundlegenden Annahmen dieses Abschnitts.

**Annahme 2.** Der Prozess  $\tilde{S}$  ist quadratintegrierbar, d.h.

$$\tilde{S}_t \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_t, P) \quad \forall t \in \{0, \dots, T\}.$$

Die europäische Forderung  $\tilde{H}$  ist quadratintegrierbar, d.h.

$$\tilde{H} \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P).$$

Annahme 2 sei in diesem Abschnitt stets erfüllt. Der den Aktienanteil festlegende Prozess erfülle dabei folgende Voraussetzung:

**Definition 1.12.**  $\Phi$  bezeichnet die Menge der zulässigen Prozesse, d.h.

$$\Phi := \{(\phi_t^1)_{1 \leq t \leq T} \text{ vorhersagbar, quadratintegrierbar} \mid \phi_t^1 \Delta \tilde{S}_t \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_t, P) \quad \forall t\}.$$

Wir beschränken uns auf selbstfinanzierende Handelsstrategien, d.h. die Handelsstrategie ist über  $V_0 = V_0(\phi)$  und  $\phi^1$  vollständig festgelegt. Das zu lösende Optimierungsproblem lautet:

**Definition 1.13.** Ein Paar  $(V_0^*, \phi^*)$  mit  $V_0^* \in \mathbb{R}, \phi^* \in \Phi$  heißt *varianzoptimale Handelsstrategie*, wenn  $(V_0^*, \phi^*)$  eine Lösung von

$$\inf_{V_0 \in \mathbb{R}, \phi \in \Phi} E[(\tilde{H} - V_0 - \tilde{G}_T(\phi))^2] \tag{1.2}$$

ist. Äquivalent dazu ist die Formulierung

$$\inf_{\xi} E[(\tilde{H} - \tilde{V}_T(\xi))^2],$$

wobei  $\xi$  eine selbstfinanzierende Handelsstrategie ist, mit  $\xi^1 \in \Phi$ .

*Bemerkung 1.14.* Die Äquivalenz der beiden Formulierungen folgt direkt aus unserer Definition der selbstfinanzierenden Handelsstrategien. Von fundamentaler Bedeutung ist die Frage, unter welchem Maß wir den Erwartungswert betrachten. Ein Maßwechsel in ein äquivalentes Martingalmaß würde zwar die Frage nach der Existenz einer zulässigen Lösung vereinfachen, liefert aber zwei Probleme: Unser Marktmodell ist unvollständig, dementsprechend gibt es unendlich viele äquivalente Martingalmaße. Die Auswahl eines Maßes  $Q$  entspräche inhaltlich der Vorgabe einer gewissen Bewertungsvorschrift, was wir vermeiden wollen; desweiteren ist es möglich, dass eine unter  $Q$  optimale Handelsstrategie unter dem realen Maß  $P$  nicht im Geringsten optimal ist. Wir betrachten also das Optimierungsproblem unter  $P$ .

*Bemerkung 1.15.* Wir betrachten den Finanzmarkt aus Sicht des Verkäufers der Forderung  $H$ . Der Term

$$\tilde{H} - V_0 - \tilde{G}_T(\phi)$$

beschreibt also den diskontierten Verlust den der Verkäufer zum Zeitpunkt  $T$  erleidet. Um die Existenz einer varianzoptimalen Handelsstrategie beweisen zu können, gehen wir nun wie folgt vor: Wir definieren das Funktional

$$\phi \in \Phi \mapsto E[(\tilde{H} - V_0 - \tilde{G}_T(\phi))^2]$$

und minimieren es für fixes  $V_0$ ; danach variieren wir  $V_0$ . Dazu definieren wir den Raum der (zeitdiskreten) stochastischen Integrale

$$\mathcal{G}_T := \{\tilde{G}_T(\phi) | \phi \in \Phi\}.$$

Klarerweise ist  $\mathcal{G}_T$  ein linearer Unterraum von  $\mathcal{L}^2$ , gelingt es uns zu zeigen, dass  $\mathcal{G}_T$  abgeschlossen ist, können wir  $\tilde{H} - V_0$  orthogonal auf  $\mathcal{G}_T$  projizieren. Eine hinreichende Bedingung dafür ist, wie wir später zeigen werden, die Bedingung des beschränkten mean-variance tradeoffs:

**Definition 1.16.** *Das Finanzgut  $\tilde{S}^1$  erfüllt genau dann die Bedingung des beschränkten mean-variance tradeoff (beziehungsweise die Nicht-Degeneriertheits-Bedingung ND), wenn*

$$(E[\Delta\tilde{S}_t^1 | \mathcal{F}_{t-1}])^2 \leq C \text{Var}[\Delta\tilde{S}_t^1 | \mathcal{F}_{t-1}] \quad P\text{-f.s. } \forall t \in \{1, \dots, T\} \quad (1.3)$$

für eine Konstante  $C \in \mathbb{R}^+$  erfüllt ist. Äquivalent dazu ist die Formulierung

$$(E[\Delta\tilde{S}_t^1 | \mathcal{F}_{t-1}])^2 \leq \delta E[(\Delta\tilde{S}_t^1)^2 | \mathcal{F}_{t-1}] \quad P\text{-f.s. } \forall t \in \{1, \dots, T\} \quad (1.4)$$

mit  $\delta \in (0, 1)$ .

*Beweis.* Die Äquivalenz der beiden Formulierungen folgt sofort aus

$$(1.3) \iff (1 + C)(E[\Delta\tilde{S}_t^1 | \mathcal{F}_{t-1}])^2 \leq C E[(\Delta\tilde{S}_t^1)^2 | \mathcal{F}_{t-1}]$$

$$\iff (E[\Delta\tilde{S}_t^1 | \mathcal{F}_{t-1}])^2 \leq \frac{C}{1 + C} E[(\Delta\tilde{S}_t^1)^2 | \mathcal{F}_{t-1}]$$

□

Obige Bedingung ist bei der Konstruktion eines Marktmodells keine drastische Einschränkung, sind die Zuwächse z.B. unabhängige Zufallsvariable mit existierender Varianz, so ist die Bedingung stets erfüllt; handelt es sich bei  $P$  um ein Martingalmaß ist die Bedingung ebenfalls erfüllt, unabhängig von der Beschaffenheit der Zuwächse. Das

Relevante an Bedingung (1.4) ist  $\delta < 1$ , da auf Grund der Jensenschen Ungleichung stets

$$(E[\Delta\tilde{S}_t^1|\mathcal{F}_{t-1}])^2 \leq E[(\Delta\tilde{S}_t^1)^2|\mathcal{F}_{t-1}]$$

gilt. Ist (1.4) erfüllt, können wir die Existenz einer varianzoptimalen Handelsstrategie nachweisen. Wir benötigen dazu eine zeitdiskrete Formulierung der Doob'schen Zerlegung (wir verwenden eine adaptierte Formulierung der Zerlegung aus [7], S. 257).

**Satz 1.17.** *Sei  $P$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $(\Omega, \mathcal{F}_T)$  und  $X$  ein adaptierter Prozess mit  $X_t \in \mathcal{L}^1$  für alle  $t$ , dann existiert eine  $P$ -f.s. eindeutige Zerlegung des Prozesses*

$$X = X_0 + M + A$$

wobei  $M$  ein  $P$ -Martingal mit  $M_0 = 0$  ist, und  $A$  ein vorhersagbarer Prozess mit  $A_0 = 0$ .

*Beweis.* Setze

$$A_t - A_{t-1} := E[X_t - X_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1}] \quad \forall t \in \{1, \dots, T\}. \quad (1.5)$$

Damit ist  $A_t$  stets  $\mathcal{F}_{t-1}$ -messbar;  $A$  ist also vorhersagbar. Wir setzen

$$M_t = X_t - A_t - X_0.$$

$M$  ist ein  $P$ -Martingal da

$$\begin{aligned} E[X_t - A_t - X_0|\mathcal{F}_{t-1}] &= E[X_t - X_0|\mathcal{F}_{t-1}] - E[A_t - A_{t-1} + A_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1}] \\ &= E[X_t - X_0|\mathcal{F}_{t-1}] - E[E[X_t - X_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1}]|\mathcal{F}_{t-1}] - E[A_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1}] \\ &= X_{t-1} - X_0 - A_{t-1} = M_{t-1}. \end{aligned}$$

Die Eindeutigkeit der Zerlegung folgt aus der Tatsache, dass jeder Prozess  $A$ , der die Bedingungen der Zerlegung erfüllt, die Bedingung (1.5) erfüllen muss, sowie der Eindeutigkeit der bedingten Erwartung.  $\square$

Wir erhalten folgende Proposition

**Proposition 1.18.** *Sei  $\tilde{S}^1$  unser risikobehaftetes Finanzprodukt. Dann besitzt  $\tilde{S}^1$  eine  $P$ -f.s. eindeutige Zerlegung*

$$\tilde{S}^1 = \tilde{S}_0^1 + Y + B \quad (1.6)$$

wobei  $Y = (Y_t)_{t \in \{0, \dots, T\}}$  ein quadratintegrierbares  $P$ -Martingal ist mit  $Y_0 = 0$ ;  $B = (B_t)_{t \in \{0, \dots, T\}}$  ist ein quadratintegrierbarer vorhersagbarer Prozess mit  $B_0 = 0$ . Die beiden Prozesse sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \Delta B_t &= E[\Delta\tilde{S}_t^1|\mathcal{F}_{t-1}] \quad \forall t \in \{1, \dots, T\} \\ \Delta Y_t &= \Delta\tilde{S}_t^1 - \Delta\tilde{B}_t \quad \forall t \in \{1, \dots, T\}. \end{aligned}$$

Wir beweisen nun die Abgeschlossenheit von  $\mathcal{G}_T$ .

**Satz 1.19.** *Erfülle  $\tilde{S}^1$  die Bedingung (1.3). Dann ist  $\mathcal{G}_T$  abgeschlossen in  $\mathcal{L}^2$ .*

*Beweis.* Zur Verkürzung der Notation setzen wir:

$$\begin{aligned}\mu_t &= E[\Delta\tilde{S}_t^1 | \mathcal{F}_{t-1}] \quad \forall t \in \{1, \dots, T\} \\ \sigma_t^2 &= \text{Var}[\Delta\tilde{S}_t^1 | \mathcal{F}_{t-1}] \quad \forall t \in \{1, \dots, T\}.\end{aligned}$$

Sei die Doob-Zerlegung von  $\tilde{S}^1$  wie zuvor

$$\tilde{S}^1 = \tilde{S}_0^1 + Y + B$$

Offensichtlich gilt

$$\sigma_t^2 = E[(\Delta Y_t)^2 | \mathcal{F}_{t-1}] \quad \forall t \in \{1, \dots, T\}.$$

Sei nun  $\phi \in \Phi$  beliebig. Mit obiger Gleichung sowie der Glättungseigenschaft der bedingten Erwartung folgt

$$\begin{aligned}E[\tilde{G}_T(\phi)^2] &= E[(\tilde{G}_{T-1}(\phi) + \phi_T \Delta\tilde{S}_T^1)^2] = \\ &E[(\tilde{G}_{T-1}(\phi) + \phi_T \Delta B_T)^2] + E[(\phi_T \Delta Y_T)^2] \geq E[\phi_T^2 \sigma_T^2]\end{aligned} \quad (1.7)$$

Sei  $\phi^{(n)}$  eine Folge in  $\Phi$  sodass

$$\tilde{G}_T(\phi^{(n)}) \longrightarrow Z \in \mathcal{L}^2 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

Aus der Linearität von  $\tilde{G}_T$  und (1.7) folgt

$$E[(\tilde{G}_T(\phi^{(n)}) - \tilde{G}_T(\phi^{(m)}))^2] = E[(\tilde{G}_T(\phi^{(n)} - \phi^{(m)}))^2] \geq E[(\phi_T^{(n)} - \phi_T^{(m)})^2 \sigma_T^2],$$

d.h. die Folge

$$\hat{\phi}_T^{(n)} := \phi_T^{(n)} \sigma_T$$

ist eine Cauchyfolge in  $\mathcal{L}^2$ . Sei

$$\hat{\phi}_T := \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\phi}_T^{(n)} \quad \text{und} \quad \phi_T := I_{\sigma_T > 0} \frac{\hat{\phi}_T}{\sigma_T}.$$

Dann ist  $\phi_T$  eine  $\mathcal{F}_{T-1}$ -messbare Zufallsvariable mit

$$E[(\phi_T \Delta\tilde{S}_T^1)^2] \leq E[\phi_T^2 \sigma_T^2] \leq E[\hat{\phi}_T^2] < \infty.$$

Unter Verwendung der Glättungseigenschaft der bedingten Erwartung folgt

$$\begin{aligned}E[(\phi_T^{(n)} \Delta\tilde{S}_T^1 - \phi_T \Delta\tilde{S}_T^1)^2] &= E[(\phi_T^{(n)} - \phi_T)^2 E[(\Delta\tilde{S}_T^1)^2 | \mathcal{F}_{T-1}]] \\ &= E[(\phi_T^{(n)} - \phi_T)^2 (\sigma_T^2 + \mu_T^2)].\end{aligned}$$

Bedingung (1.3) lautet

$$\mu_t^2 \leq C \sigma_t^2 \quad \forall t \in \{1, \dots, T\}$$

und liefert

$$E[(\phi_T^{(n)} - \phi_T)^2 (\sigma_T^2 + \mu_T^2)] \leq (1 + C) E[(\phi_T^{(n)} \sigma_T - \phi_T \sigma_T)^2] = (1 + C) E[(\hat{\phi}_T^{(n)} - \hat{\phi}_T)^2].$$

Nach Konstruktion strebt der letzte Term gegen 0, wir erhalten für  $n \rightarrow \infty$

$$\tilde{G}_{T-1}(\phi^{(n)}) = \tilde{G}_T(\phi^{(n)}) - \phi^{(n)} \Delta \tilde{S}_T^1 \longrightarrow Z - \phi_T \Delta \tilde{S}_T^1 \quad (1.8)$$

Durch Rückwärtsinduktion über  $t$  erhalten wir einen vorhersagbaren Prozess  $\phi \in \Phi$  mit

$$\tilde{G}_T(\phi) = Z.$$

Damit ist  $\mathcal{G}_T$  abgeschlossen. □

Nun ist es ein Leichtes die Existenz einer varianzoptimalen Handelsstrategie zu beweisen, wir folgen dabei [7], S. 371. Grundlage ist dabei der Projektionssatz, wir verwenden eine Formulierung aus [11].

**Satz 1.20.** *Sei  $F$  ein vollständiger Unterraum des Innenproduktraumes  $E$  und sei  $OP$  der Orthogonalprojektor von  $E$  auf  $F$ . Dann ist  $\forall x \in E$   $OP(x)$  die Bestapproximation an  $x$  in  $F$ , d.h.*

$$\|x - OP(x)\| \leq \|x - u\| \quad \forall u \in F$$

**Korollar 1.21.** *Sei wie zuvor (1.3) erfüllt. Dann existiert eine varianzoptimale Handelsstrategie  $(V_0^*, \phi^*)$ .*

*Beweis.* Definieren wir dazu das lineare Funktional

$$OP : \mathcal{L}^2 \longrightarrow \mathcal{G}_T,$$

das Elemente aus  $\mathcal{L}^2$  orthogonal auf  $\mathcal{G}_T$  projiziert. Es gilt also

$$E[(Y - OP(Y))^2] = \min_{Z \in \mathcal{G}_T} E[(Y - Z)^2] \quad \forall Y \in \mathcal{L}^2.$$

Für ein beliebiges  $V_0 \in \mathbb{R}^+$  wählen wir nun  $\phi(V_0) \in \Phi$  derart, dass

$$\tilde{G}_T(\phi(V_0)) = OP(\tilde{H} - V_0).$$

Damit ist  $\phi(V_0)$  Minimierer von

$$E[(\tilde{H} - V_0 - \tilde{G}_T(\phi))^2]$$

über alle  $\phi \in \Phi$ . Die Abbildung

$$V_0 \longmapsto \tilde{G}_T(\phi(V_0))$$

ist affin linear, da

$$\tilde{G}_T(\phi(V_0)) = OP(\tilde{H} - V_0) = OP(\tilde{H}) - V_0 OP(1).$$

$E[(\tilde{H} - V_0 - \tilde{G}_T(\phi))^2]$  ist eine quadratische Funktion in  $V_0$  und es existiert ein Minimum  $V_0^*$ . Dadurch ist die varianzoptimale Handelsstrategie  $(V_0^*, \phi(V_0^*))$  gegeben. □

Unter der Bedingung (1.3) ist also die Existenz einer varianzoptimalen Handelsstrategie stets garantiert, der Beweis liefert allerdings keinen Hinweis darauf, wie diese Handelsstrategie berechnet werden kann. Zur strukturellen Analyse der Strategie definieren wir rekursiv den sogenannten Adjustierungsprozess

**Definition 1.22.** *Der Adjustierungsprozess  $\beta = (\beta_t)_{t \in \{1, \dots, T\}}$  zu  $\tilde{S}^1$  ist rekursiv definiert durch*

$$\beta_t := \frac{E[\Delta \tilde{S}_t^1 \prod_{j=t+1}^T (1 - \beta_j \Delta \tilde{S}_j^1) | \mathcal{F}_{t-1}]}{E[(\Delta \tilde{S}_t^1)^2 \prod_{j=t+1}^T (1 - \beta_j \Delta \tilde{S}_j^1)^2 | \mathcal{F}_{t-1}]} \quad \forall t \in \{1, \dots, T\}. \quad (1.9)$$

Für den Prozess gilt

**Proposition 1.23.** *Sei (1.4) erfüllt. Dann ist der Adjustierungsprozess  $\beta$  wohldefiniert, vorhersagbar und erfüllt die Eigenschaften*

$$\alpha_t := \prod_{j=t}^T (1 - \beta_j \Delta \tilde{S}_j^1) \in \mathcal{L}^2 \quad \forall t \in \{1, \dots, T\}$$

$$\Delta \tilde{S}_t^1 \alpha_{t+1} \in \mathcal{L}^2 \quad \forall t \in \{1, \dots, T\}$$

$$\beta_t \Delta \tilde{S}_t^1 \alpha_{t+1} \in \mathcal{L}^2 \quad \forall t \in \{1, \dots, T\}$$

sowie

$$E\left[\prod_{j=t}^T (1 - \beta_j \Delta \tilde{S}_j^1) | \mathcal{F}_{t-1}\right] = E\left[\prod_{j=t}^T (1 - \beta_j \Delta \tilde{S}_j^1)^2 | \mathcal{F}_{t-1}\right] \leq 1. \quad (1.10)$$

Im Speziellen erfüllt die Zufallsvariable  $Z^0$

$$Z^0 := \prod_{j=1}^T (1 - \beta_j \Delta \tilde{S}_j^1) \in \mathcal{L}^2 \quad (1.11)$$

sowie

$$0 \leq E[Z^0] \leq E[(Z^0)^2] \leq 1. \quad (1.12)$$

$$E[Z^0 \tilde{G}_T(\phi)] = 0 \quad \forall \phi \in \Phi \quad (1.13)$$

$$E[Z^0 \Delta \tilde{S}_t^1 | \mathcal{F}_{t-1}] = 0 \quad P\text{-f.s. } \forall t \in \{1, \dots, T\}. \quad (1.14)$$

*Beweis.* Siehe [3]. □

Weiters definieren wir den Prozess  $\rho$ :

**Definition 1.24.** *Der vorhersagbare Prozess  $\rho = (\rho_t)_{t \in \{1, \dots, T\}}$  ist definiert durch*

$$\rho_t = \frac{E[\tilde{H} \Delta \tilde{S}_t^1 \prod_{j=t+1}^T (1 - \beta_j \Delta \tilde{S}_j^1) | \mathcal{F}_{t-1}]}{E[(\Delta \tilde{S}_t^1)^2 \prod_{j=t+1}^T (1 - \beta_j \Delta \tilde{S}_j^1)^2 | \mathcal{F}_{t-1}]} \quad \forall t \in \{1, \dots, T\}.$$

**Lemma 1.25.** *Es gilt P-f.s.  $\forall t \in \{1, \dots, T\}$*

$$E[\tilde{H}\beta_t\Delta\tilde{S}_t^1 \prod_{j=t+1}^T (1 - \beta_j\Delta\tilde{S}_j^1)|\mathcal{F}_{t-1}] = E[\rho_t\Delta\tilde{S}_t^1 \prod_{j=t+1}^T (1 - \beta_j\Delta\tilde{S}_j^1)|\mathcal{F}_{t-1}]. \quad (1.15)$$

*Beweis.* Die Eigenschaft folgt sofort aus der  $\mathcal{F}_{t-1}$ -Messbarkeit von  $\beta_t$ .  $\square$

Nun können wir folgenden wichtigen Satz formulieren, der uns Aufschluss über die Struktur einer varianzoptimalen Handelsstrategie liefert; die Darstellung gilt für beliebiges fixes  $V_0 \in \mathbb{R}$ .

**Satz 1.26.** *Sei (1.4) erfüllt,  $V_0^* \in \mathbb{R}$  beliebig, fix und  $\phi^*$  die dazugehörige varianzoptimale Handelsstrategie für die Forderung  $\tilde{H}$ . Dann gilt P - f.s.  $\forall t \in \{1, \dots, T\}$*

$$\tilde{H} - V_0^* - \tilde{G}_T(\phi^*) = \tilde{H} - \sum_{j=t}^T \rho_j \Delta\tilde{S}_j^1 \alpha_{j+1} - (V_0^* + \tilde{G}_{t-1}(\phi^*))\alpha_t \quad (1.16)$$

sowie

$$\phi_t^* = \rho_t - \beta_t(V_0^* + \tilde{G}_{t-1}(\phi^*)) \quad (1.17)$$

*Beweis.* Wie zuvor zeigen wir die beiden Eigenschaften über Rückwärtsinduktion. Aufgrund des Projektionssatzes gilt:  $\phi^*$  löst genau dann das Problem (1.3), wenn

$$E[(\tilde{H} - V_0^* - \tilde{G}_T(\phi^*))\tilde{G}_T(\phi)] = 0 \quad \forall \phi \in \Phi.$$

Die Glättungseigenschaft der bedingten Erwartung liefert uns die dazu äquivalente Bedingung

$$E[(\tilde{H} - V_0^* - \tilde{G}_T(\phi^*))\Delta\tilde{S}_t^1|\mathcal{F}_{t-1}] = 0 \quad P\text{-f.s. } \forall t \in \{1, \dots, T\}.$$

Wegen

$$0 = E[(\tilde{H} - V_0^* - \tilde{G}_T(\phi^*))\Delta\tilde{S}_T^1|\mathcal{F}_{T-1}] = E[\tilde{H}\Delta\tilde{S}_T^1 - \phi_T^*(\Delta\tilde{S}_T^1)^2 - (V_0^* - \tilde{G}_{T-1}(\phi^*))\Delta\tilde{S}_T^1|\mathcal{F}_{T-1}]$$

folgt (1.17) für  $T=t$  aus der Definition von  $\beta_T$  und  $\rho_T$ . Aus (1.17) erhält man

$$\begin{aligned} \tilde{H} - V_0^* - \tilde{G}_T(\phi^*) &= \tilde{H} - \phi^* \Delta\tilde{S}_T^1 - (V_0^* + \tilde{G}_{T-1}(\phi^*)) \\ &= \tilde{H} - \rho_T \Delta\tilde{S}_T^1 - (V_0^* + \tilde{G}_{T-1}(\phi^*))(1 - \beta_T \Delta\tilde{S}_T^1), \end{aligned}$$

was (1.16) für  $T=t$  entspricht. Sei also nun unsere Induktionshypothese, dass (1.16), (1.17) für  $j=t+1, \dots, T$  erfüllt sind. Dann folgt

$$\begin{aligned} 0 &= E[(\tilde{H} - V_0^* - \tilde{G}_t(\phi^*))\Delta\tilde{S}_t^1|\mathcal{F}_{t-1}] \\ &= E[\Delta\tilde{S}_t^1(\tilde{H} - \sum_{j=t+1}^T \rho_j \Delta\tilde{S}_j^1 \alpha_{j+1})|\mathcal{F}_{t-1}] - E[\Delta\tilde{S}_t^1(V_0^* + \tilde{G}_{t-1}(\phi^*))\alpha_{t+1}|\mathcal{F}_{t-1}]. \end{aligned}$$

$\phi_t^*$  ist vorhersagbar und damit  $\mathcal{F}_{t-1}$ -messbar, desweiteren ist  $\tilde{G}_{t-1}(\phi^*)$  per Konstruktion  $\mathcal{F}_{t-1}$ -messbar. Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned} &= E[\tilde{H}\Delta\tilde{S}_t^1|\mathcal{F}_{t-1}] - \sum_{j=t+1}^T E[\Delta\tilde{S}_t^1\rho_j\Delta\tilde{S}_j^1\alpha_{j+1}|\mathcal{F}_{t-1}] - \phi_t^* E[(\Delta\tilde{S}_k^1)^2\alpha_{t+1}|\mathcal{F}_{t-1}] \\ &\quad - (V_0^* + \tilde{G}_{t-1}(\phi^*))E[(\Delta\tilde{S}_k^1)\alpha_{t+1}|\mathcal{F}_{t-1}]. \end{aligned}$$

Wir betrachten den Term

$$\sum_{j=t+1}^T E[\Delta\tilde{S}_t^1\rho_j\Delta\tilde{S}_j^1 \prod_{l=j+1}^T (1 - \beta_l\Delta\tilde{S}_l^1)|\mathcal{F}_{t-1}].$$

Aufgrund der Glättungseigenschaft gilt

$$\sum_{j=t+1}^T E[\Delta\tilde{S}_t^1\rho_j\Delta\tilde{S}_j^1\alpha_{j+1}|\mathcal{F}_{t-1}] = \sum_{j=t+1}^T E[E[\Delta\tilde{S}_t^1\rho_j\Delta\tilde{S}_j^1\alpha_{j+1}|\mathcal{F}_{j-1}]|\mathcal{F}_{t-1}].$$

Nun können wir den Zusammenhang (1.15) zwischen den Prozessen  $\rho$  und  $\beta$  auf jeden Summanden anwenden und erhalten

$$\begin{aligned} &= E[\tilde{H}\Delta\tilde{S}_t^1(1 - \sum_{j=t+1}^T \beta_j\Delta\tilde{S}_j^1\alpha_{j+1})|\mathcal{F}_{t-1}] - \phi_t^* E[(\Delta\tilde{S}_k^1)^2\alpha_{t+1}|\mathcal{F}_{t-1}] \\ &\quad - (V_0^* + \tilde{G}_{t-1}(\phi^*))E[(\Delta\tilde{S}_k^1)\alpha_{t+1}|\mathcal{F}_{t-1}]. \end{aligned}$$

Durch Verwendung der Identität

$$\prod_{j=t+1}^T (1 - c_j) = 1 - \sum_{j=t+1}^T c_j \prod_{l=j+1}^T (1 - c_l)$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} &= E[\tilde{H}\Delta\tilde{S}_t^1\alpha_{t+1}|\mathcal{F}_{t-1}] - \phi_t^* E[(\Delta\tilde{S}_k^1)^2\alpha_{t+1}|\mathcal{F}_{t-1}] \\ &\quad - (V_0^* + \tilde{G}_{t-1}(\phi^*))E[(\Delta\tilde{S}_k^1)\alpha_{t+1}|\mathcal{F}_{t-1}] = 0. \end{aligned}$$

(1.17) folgt für t aus obiger Gleichung sowie dem Zusammenhang

$$E[\prod_{j=t}^T (1 - \beta_j\Delta\tilde{S}_j^1)|\mathcal{F}_{t-1}] = E[\prod_{j=t}^T (1 - \beta_j\Delta\tilde{S}_j^1)^2|\mathcal{F}_{t-1}].$$

Damit gilt

$$V_0^* + \tilde{G}_t(\phi^*) = V_0^* + \phi_t^*\Delta\tilde{S}_t^1 + \tilde{G}_{t-1}(\phi^*) = \rho_t\Delta\tilde{S}_t^1 + (V_0^* + \tilde{G}_{t-1}(\phi^*))(1 - \beta_t\Delta\tilde{S}_t^1).$$

Mit (1.16) für t+1 (erfüllt laut Induktionshypothese) erhalten wir

$$\begin{aligned} \tilde{H} - V_0^* - \tilde{G}_T(\phi^*) &= \tilde{H} - \sum_{j=t+1}^T \rho_j\Delta\tilde{S}_j^1\alpha_{j+1} - (V_0^* + \tilde{G}_t(\phi^*))\alpha_{t+1} \\ &= \tilde{H} - \sum_{j=t}^T \rho_j\Delta\tilde{S}_j^1\alpha_{j+1} - (V_0^* + \tilde{G}_{t-1}(\phi^*))\alpha_t. \end{aligned}$$

was (1.16) für t entspricht. □

**Korollar 1.27.** Sei  $Z^0$  durch (1.11) definiert, dann gilt

$$E[\tilde{H} - V_0^* - \tilde{G}_T(\phi^*)] = E[(\tilde{H} - V_0^*)\alpha_1] = E[Z^0\tilde{H}] - V_0^*E[Z^0]$$

sowie

$$E[(\tilde{H} - V_0^* - \tilde{G}_T(\phi^*))^2] = (V_0^*)^2E[Z^0] - 2V_0^*E[Z^0\tilde{H}] + E[(\tilde{H} - \sum_{j=1}^T \rho_j \Delta \tilde{S}_j^1 \alpha_{j+1})^2].$$

*Beweis.* Aus (1.16) mit  $t=1$  folgt

$$E[\tilde{H} - V_0^* - \tilde{G}_T(\phi^*)] = E[\tilde{H} - \sum_{j=1}^T \rho_j \Delta \tilde{S}_j^1 \alpha_{j+1} - V_0^* \alpha_1].$$

Bedingt man den  $j$ -ten Summanden der Summe auf  $\mathcal{F}_{j-1}$  erhält man unter Verwendung von (1.15)

$$= E[\tilde{H}(1 - \sum_{j=1}^T \beta_j \Delta \tilde{S}_j^1 \alpha_{j+1})] - E[V_0^* \alpha_1].$$

Verwenden wir erneut die Identität

$$\prod_{j=t+1}^T (1 - c_j) = 1 - \sum_{j=t+1}^T c_j \prod_{l=j+1}^T (1 - c_l)$$

erhalten wir mit der Definition von  $Z^0$  die gewünschte Eigenschaft für den Erwartungswert. Wir gehen analog für  $E[(\tilde{H} - V_0^* - \tilde{G}_T(\phi^*))^2]$  vor. Für  $t=1$  liefert (1.16)

$$\begin{aligned} E[(\tilde{H} - V_0^* - \tilde{G}_T(\phi^*))^2] &= (V_0^*)^2 E[\prod_{j=1}^T (1 - \beta_j \Delta \tilde{S}_j^1)^2] + E[(\tilde{H} - \sum_{j=1}^T \rho_j \Delta \tilde{S}_j^1 \alpha_{j+1})^2] \\ &\quad - 2V_0^* E[(\tilde{H} - \sum_{j=1}^T \rho_j \Delta \tilde{S}_j^1 \alpha_{j+1})\alpha_1]. \end{aligned}$$

Aus (1.12) folgt

$$(V_0^*)^2 E[\prod_{j=1}^T (1 - \beta_j \Delta \tilde{S}_j^1)^2] = (V_0^*)^2 E[Z^0].$$

(1.11) wiederum liefert

$$-2V_0^* E[(\tilde{H} - \sum_{j=1}^T \rho_j \Delta \tilde{S}_j^1 \alpha_{j+1})\alpha_1] = -2V_0^* E[Z^0 \tilde{H}].$$

Betrachten wir den  $j$ -ten Summanden bedingt auf  $\mathcal{F}_{j-1}$

$$E[\rho_j \Delta \tilde{S}_j^1 \alpha_{j+1} \alpha_1 | \mathcal{F}_{j-1}].$$

Es gilt

$$\prod_{k=1}^T (1 - \beta_k \Delta \tilde{S}_k^1) = \prod_{k=1}^{j-1} (1 - \beta_k \Delta \tilde{S}_k^1) \prod_{k=j}^T (1 - \beta_k \Delta \tilde{S}_k^1) = \alpha_j \prod_{k=1}^{j-1} (1 - \beta_k \Delta \tilde{S}_k^1).$$

$\rho_j$  ist  $\mathcal{F}_{j-1}$ -messbar, es folgt

$$\begin{aligned} E[\rho_j \Delta \tilde{S}_j^1 \alpha_{j+1} \alpha_1 | \mathcal{F}_{j-1}] &= \\ \rho_j \prod_{k=1}^{j-1} (1 - \beta_k \Delta \tilde{S}_k^1) E[\Delta \tilde{S}_j^1 (1 - \beta_j \Delta \tilde{S}_j^1) \prod_{l=j+1}^T (1 - \beta_l \Delta \tilde{S}_l^1)^2 | \mathcal{F}_{j-1}]. \end{aligned}$$

Mit der Glättungseigenschaft und (1.10) erhalten wir

$$E[\Delta \tilde{S}_j^1 (1 - \beta_j \Delta \tilde{S}_j^1) E[\prod_{l=j+1}^T (1 - \beta_l \Delta \tilde{S}_l^1)^2 | \mathcal{F}_j] | \mathcal{F}_{j-1}] = E[\Delta \tilde{S}_j^1 \alpha_j | \mathcal{F}_{j-1}]$$

Insgesamt folgt

$$E[\rho_j \Delta \tilde{S}_j^1 \alpha_{j+1} \alpha_1 | \mathcal{F}_{j-1}] = \rho_j E[\Delta \tilde{S}_j^1 \alpha_1 | \mathcal{F}_{j-1}].$$

Durch Anwendung von (1.13) auf die rechte Seite folgt

$$E[\rho_j \Delta \tilde{S}_j^1 \prod_{l=j+1}^T (1 - \beta_l \Delta \tilde{S}_l^1) \prod_{k=1}^T (1 - \beta_k \Delta \tilde{S}_k^1) | \mathcal{F}_{j-1}] = 0 \quad P\text{-f.s.} \quad (1.18)$$

und damit die gewünschte Eigenschaft.  $\square$

**Definition 1.28.** Ein signiertes Maß  $Q$  heißt signiertes Martingalmaß für  $\tilde{S}^1$ , wenn

- $Q(\Omega) = 1$
- $Q \ll P$
- $\frac{dQ}{dP} \in \mathcal{L}^2$  bzgl.  $P$
- $\tilde{S}^1$  ist ein  $Q$ -Martingal ist, d.h.

$$E\left[\frac{dQ}{dP} \tilde{S}_t^1 | \mathcal{F}_{t-1}\right] = 0 \quad P\text{-f.s. } \forall t \in \{1, \dots, T\} \quad (1.19)$$

**Korollar 1.29.** Sei  $E[Z^0] > 0$ . Wir definieren das signierte Martingalmaß  $Q^*$  über die Dichte

$$\frac{dQ^*}{dP} := \frac{Z^0}{E[Z^0]} \quad (1.20)$$

Es gilt: Es existiert eine eindeutige varianzoptimale Handelsstrategie  $(V_0^*, \phi^*)$ .  $V_0^*$  ist gegeben durch

$$V_0^* = \frac{E[\tilde{H} Z^0]}{E[Z^0]} = E_{Q^*}[\tilde{H}].$$

*Beweis.* Aus Korollar (1.27) ist sofort ersichtlich, dass die Wahl von  $V_0^*$  optimal ist. Die Existenz von  $\phi^*$  liefert uns Korollar (1.21). Die Eigenschaften eines signierten Martingalmaßes folgen aus der Definition von  $Q^*$  und (1.14).  $\square$

*Bemerkung 1.30.*  $Q^*$  heißt varianzoptimales signiertes Martingalmaß.  $Z^0$  kann negative Werte annehmen, damit ist  $Q^*$  im Allgemeinen kein Wahrscheinlichkeitsmaß und die Positivität von  $V_0^*$  ist nicht garantiert. Korollar 1.27 liefert uns Aussagen zu Erwartungswert und Varianz des Hedgingfehlers, bei optimaler Wahl von  $V_0^*$  gilt

$$E[\tilde{H} - V_0^* - \tilde{G}_T(\phi^*)] = 0 \quad P\text{-f.s.} \quad (1.21)$$

Die explizite Berechnung der Varianz mittels Fouriertransformation wird in Satz 1.60 behandelt. Um eine explizite Darstellung für  $\phi^*$  zu erhalten, führen wir im nächsten Abschnitt das Konzept der lokal risikominimierenden Handelsstrategien ein.

### 1.3 Lokal-Risikominierende Handelsstrategien

In diesem Abschnitt verfolgen wir den Zugang des lokal risikominimierenden Hedgens. Die Verwendung nicht selbstfinanzierender Handelsstrategien ermöglicht perfektes Hedging der Forderung  $H$ , Ziel ist es die dabei auftretenden zusätzlichen Kosten gering zu halten. Wir folgen den Arbeiten von [7], S. 348 ff und [1]; [10] behandelt lokal risikominimierendes Hedgen in zeitstetigen Modellen, die Ergebnisse sind leicht für unsere Zwecke adaptierbar. Im Mittelpunkt der Betrachtungen stehen die Fragen nach der Existenz von Lösungen des Minimierungsproblems, Analyse der Struktur der Lösung sowie einer Verallgemeinerung der Kunita-Watanabe Zerlegung der Forderung  $\tilde{H}$ . Am Ende des Abschnitts werden wir eine Verbindung zwischen dem mean-variance Problem sowie dem lokal risikominimierenden Problem herstellen, und, unter bestimmten Einschränkungen, eine rekursive Darstellung für varianzoptimale Handelsstrategien herleiten. Es sei Annahme 2 erfüllt.

**Definition 1.31.** Sei  $\phi = (\phi^0, \phi^1)$  eine Handelsstrategie gemäß Definition 1.6. Der Kostenprozess der Handelsstrategie ist definiert als

$$\tilde{C}_t(\phi) := \tilde{V}_t - \tilde{G}_t \quad t = 0, \dots, T \quad (1.22)$$

*Bemerkung 1.32.* Für selbstfinanzierende Handelsstrategien ist der Kostenprozess konstant gleich dem Anfangsinvestment  $V_0$ .

**Definition 1.33.** Sei  $\tilde{H} \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$  eine (diskontierte) Forderung. Wir nennen eine Handelsstrategie  $\phi = (\phi^0, \phi^1)$   $\mathcal{L}^2$ -zulässig, wenn sie folgende Bedingungen erfüllt:

$$\begin{aligned} \tilde{V}_T(\phi) &= \tilde{H} && P\text{-f.s.} \\ \tilde{V}_t &\in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_t, P) && \forall t \in \{0, \dots, T\} \\ \tilde{G}_t &\in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_t, P) && \forall t \in \{0, \dots, T\} \end{aligned}$$

Bezeichne  $\Phi^{loc}$  die Menge aller  $\mathcal{L}^2$ -zulässigen Handelsstrategien.

**Definition 1.34.** Der lokale Risikoprozess einer Handelsstrategie  $\phi \in \Phi^{loc}$  ist definiert als

$$R_t^{loc}(\phi) := E[(\tilde{C}_{t+1}(\phi) - \tilde{C}_t(\phi))^2 | \mathcal{F}_t] = E[(\Delta \tilde{C}_{t+1})^2 | \mathcal{F}_t] \quad t \in \{0, \dots, T-1\}. \quad (1.23)$$

$\hat{\phi} \in \Phi^{loc}$  heißt lokal risikominimierend, wenn für alle  $\phi \in \Phi^{loc}$

$$R_t^{loc}(\hat{\phi}) \leq R_t^{loc}(\phi) \quad \forall t \in \{0, \dots, T-1\} \quad (1.24)$$

erfüllt ist.

Wir versuchen also die bedingte quadratische Zunahme der Kosten zu minimieren. Im Allgemeinen ist  $\hat{\phi}$  nicht selbstfinanzierend, allerdings erfüllt sie die schwächere Eigenschaft im Mittel selbstfinanzierend zu sein. Der Kostenprozess von  $\hat{\phi}$  ist stark orthogonal zu  $\tilde{S} = (1, \tilde{S}^1)$ .

**Definition 1.35.**  $\phi \in \Phi^{loc}$  heißt im Mittel selbstfinanzierend, wenn der Kostenprozess  $\tilde{C}(\phi)$  ein Martingal bzgl.  $P$  ist, d.h.

$$E[\Delta\tilde{C}_{t+1}(\phi)|\mathcal{F}_t] = 0 \quad P\text{-f.s. } \forall t \in \{0, \dots, T-1\}.$$

**Definition 1.36.** Zwei adaptierte Prozesse  $U, V$  heißen stark orthogonal zueinander bzgl.  $P$ , wenn die bedingte Kovarianz der Zuwächse

$$Cov[\Delta U_{t+1}, \Delta V_{t+1}|\mathcal{F}_t] \quad \forall t \in \{0, \dots, T-1\} \quad (1.25)$$

wohldefiniert ist und  $P$ -f.s. verschwindet.

Folgender Satz liefert uns eine Charakterisierung der lokal risikominimierenden Handelsstrategien durch diese beiden Eigenschaften.

**Satz 1.37.**  $\phi \in \Phi^{loc}$  ist genau dann lokal risikominimierend, wenn  $\phi$  im Mittel selbstfinanzierend ist und der Kostenprozess  $\tilde{C}(\phi)$  streng orthogonal zu  $\tilde{S}$  ist.

*Beweis.* Zerlegen wir den lokalen Risikoprozess in zwei Terme und betrachten diese einzeln

$$R_t^{loc}(\phi) = Var[\Delta\tilde{C}_{t+1}(\phi)|\mathcal{F}_t] + E[\Delta\tilde{C}_{t+1}(\phi)|\mathcal{F}_t]^2$$

Die bedingte Varianz ändert sich durch die Addition  $\mathcal{F}_t$ -messbarer Terme nicht, es gilt

$$Var[\Delta\tilde{C}_{t+1}(\phi)|\mathcal{F}_t] = Var[\tilde{V}_{t+1}(\phi) - \phi_{t+1}^1 \Delta\tilde{S}_{t+1}^1|\mathcal{F}_t]. \quad (1.26)$$

Unter der Beachtung der  $\mathcal{F}_t$ -Messbarkeit von  $\phi_{t+1}^1$  folgt

$$E[\Delta\tilde{C}_{t+1}(\phi)|\mathcal{F}_t]^2 = (E[\tilde{V}_{t+1}|\mathcal{F}_t] - \phi_{t+1}^1 E[\Delta\tilde{S}_{t+1}^1|\mathcal{F}_t] - \tilde{V}_t)^2 \quad (1.27)$$

Wir fixieren  $t$  und  $\tilde{V}_{t+1}(\phi)$  und bestimmen  $\phi_{t+1}^1$  und  $\tilde{V}_t$  derart, dass (1.26) und (1.27) minimal werden. Da  $\phi$  nicht notwendigerweise selbstfinanzierend ist, können wir  $\phi^0$  so modifizieren, dass  $\tilde{V}_t(\phi)$  jeden beliebigen Wert annimmt, die Werte von  $\phi_{t+1}^1$  und  $\tilde{V}_{t+1}$  unverändert bleiben und die Handelsstrategie  $\phi$  immer noch in  $\Phi^{loc}$  liegt. Eine derartige Modifikation hat keinen Einfluss auf (1.26); daraus lässt sich eine notwendige Bedingung für die Optimierung von  $R_t^{loc}(\phi)$  ableiten

$$R_t^{loc}(\phi) \text{ ist optimal} \implies \tilde{V}_t \text{ minimiert (1.27)}$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$\tilde{V}_t = E[\tilde{V}_{t+1}|\mathcal{F}_t] - \phi_{t+1}^1 E[\Delta\tilde{S}_{t+1}^1|\mathcal{F}_t], \quad (1.28)$$

wir erhalten

$$0 = E[\tilde{V}_{t+1}|\mathcal{F}_t] - \phi_{t+1}^1 E[\Delta\tilde{S}_{t+1}^1|\mathcal{F}_t] - \tilde{V}_t = E[\Delta\tilde{C}_{t+1}|\mathcal{F}_t]$$

und damit die gewünschte Martingaleigenschaft für  $\tilde{C}$ . (1.26) ist eine quadratische Form in  $\phi_{t+1}^1$ , Differentiation nach  $\phi_{t+1}^1$  liefert: (1.26) ist genau dann minimal, wenn

$$E[(\tilde{V}_{t+1}(\phi) - \phi_{t+1}^1 \Delta \tilde{S}_{t+1}^1)(\Delta \tilde{S}_{t+1}^1) | \mathcal{F}_t] - E[\tilde{V}_{t+1} - \phi_{t+1}^1 \Delta \tilde{S}_{t+1}^1 | \mathcal{F}_t] E[\Delta \tilde{S}_{t+1}^1 | \mathcal{F}_t] = 0$$

erfüllt ist. Dies entspricht der per Definition der bedingten Kovarianz der Bedingung

$$Cov[\tilde{V}_{t+1} - \phi_{t+1}^1 \Delta \tilde{S}_{t+1}^1, \Delta \tilde{S}_{t+1}^1 | \mathcal{F}_t] = 0. \quad (1.29)$$

Durch Subtraktion von  $\tilde{V}_t$  erhalten wir

$$Cov[\tilde{V}_{t+1} - \phi_{t+1}^1 \Delta \tilde{S}_{t+1}^1 - \tilde{V}_t, \Delta \tilde{S}_{t+1}^1 | \mathcal{F}_t] = Cov[\Delta \tilde{C}_{t+1}(\phi), \Delta \tilde{S}_{t+1}^1 | \mathcal{F}_t].$$

Auf Grund der Martingaleigenschaft von  $\tilde{C}_t$  gilt

$$Cov[\Delta \tilde{C}_{t+1}(\phi), \Delta \tilde{S}_{t+1}^1 | \mathcal{F}_t] = E[(\Delta \tilde{C}_{t+1}(\phi))(\Delta \tilde{S}_{t+1}^1) | \mathcal{F}_t]. \quad (1.30)$$

(1.26) ist genau dann minimal, wenn  $E[\Delta \tilde{C}_{t+1}(\phi) \Delta \tilde{S}_{t+1}^1 | \mathcal{F}_t] = 0$  erfüllt ist. Das beweist den Satz.  $\square$

Satz 1.37 liefert uns eine Rekursionsformel zur Berechnung der Handelsstrategie  $\phi$ . Wir fassen das Vorgehen im folgenden Satz zusammen.

**Satz 1.38.** *Sei die Bedingung (1.3) erfüllt. Dann liefert folgende Rekursion eine lokal risikominimierende Handelsstrategie  $\hat{\phi} = (\hat{\phi}^0, \hat{\phi}^1)$ .*

$$\tilde{V}_T(\hat{\phi}) := \tilde{H}$$

$$\hat{\phi}_{t+1}^1 := \frac{Cov[\tilde{V}_{t+1}(\hat{\phi}), \Delta \tilde{S}_{t+1}^1 | \mathcal{F}_t]}{Var[\Delta \tilde{S}_{t+1}^1 | \mathcal{F}_t]} I_{\{Var[\Delta \tilde{S}_{t+1}^1 | \mathcal{F}_t] \neq 0\}}$$

$$\tilde{V}_t(\hat{\phi}) := E[\tilde{V}_{t+1}(\hat{\phi}) | \mathcal{F}_t] - \hat{\phi}_{t+1}^1 E[\Delta \tilde{S}_{t+1}^1 | \mathcal{F}_t]$$

$$\hat{\phi}_t^0 := \tilde{V}_t(\hat{\phi}) - \hat{\phi}_t^1 \tilde{S}_t^1$$

*Beweis.* Dass die angegebene Handelsstrategie lokal risikominimierend ist folgt aus (1.28) und (1.29). Es bleibt zu zeigen, dass  $\hat{\phi}$  tatsächlich  $\mathcal{L}^2$ -zulässig ist. Es gilt

$$E[(\hat{\phi}_t^1 \Delta \tilde{S}_t^1)^2] = E\left[ \frac{Cov[\tilde{V}_t(\hat{\phi}), \Delta \tilde{S}_t^1 | \mathcal{F}_{t-1}]^2}{Var[\Delta \tilde{S}_t^1 | \mathcal{F}_{t-1}]^2} E[(\Delta \tilde{S}_t^1)^2 | \mathcal{F}_{t-1}] I_{\{Var[\Delta \tilde{S}_t^1 | \mathcal{F}_{t-1}] \neq 0\}} \right].$$

Per Voraussetzung gilt (1.3), dies ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} (1.3) &\iff (1+C)E[\Delta \tilde{S}_t^1 | \mathcal{F}_{t-1}]^2 \leq E[(\Delta \tilde{S}_t^1)^2 | \mathcal{F}_{t-1}] \\ &\iff -(1+C)E[\Delta \tilde{S}_t^1 | \mathcal{F}_{t-1}]^2 \geq -E[(\Delta \tilde{S}_t^1)^2 | \mathcal{F}_{t-1}] \\ &\iff (1+C)Var[\Delta \tilde{S}_t^1 | \mathcal{F}_{t-1}] \geq CE[(\Delta \tilde{S}_t^1)^2 | \mathcal{F}_{t-1}] \\ &\iff (1+\bar{C})Var[\Delta \tilde{S}_t^1 | \mathcal{F}_{t-1}] \geq E[(\Delta \tilde{S}_t^1)^2 | \mathcal{F}_{t-1}] \end{aligned}$$

Damit folgt

$$E[(\hat{\phi}_t^1 \Delta \tilde{S}_t^1)^2] \leq (1 + \bar{C}) E\left[\frac{\text{Cov}[\tilde{V}_t(\hat{\phi}), \Delta \tilde{S}_t^1 | \mathcal{F}_{t-1}]^2}{\text{Var}[\Delta \tilde{S}_t^1 | \mathcal{F}_{t-1}]}\right] \leq (1 + \bar{C}) E[\text{Var}[\tilde{V}_t(\hat{\phi}) | \mathcal{F}_{t-1}]]$$

Der letzte Term ist endlich, wenn  $\tilde{V}_t \in \mathcal{L}^2$ . Ist dies der Fall, folgt  $\hat{\phi}_t^1 \Delta \tilde{S}_t^1 \in \mathcal{L}^2$  und damit  $\tilde{V}_{t-1}(\hat{\phi}) \in \mathcal{L}^2$ . Die Quadratintegrierbarkeit folgt nun durch Rückwärtsinduktion aus  $\tilde{H} \in \mathcal{L}^2$ .  $\square$

*Bemerkung 1.39.* Für den Fall, dass (1.3) erfüllt ist, erhalten wir analoge Resultate zu Abschnitt 1.2. Die Existenz einer lokal risikominimierenden Handelsstrategie ist gesichert, diese ist eindeutig wenn

$$\text{Var}[\Delta \tilde{S}_t^1 | \mathcal{F}_{t-1}] \neq 0 \quad \forall t \in \{1, \dots, T\}$$

erfüllt ist. Wir werden uns in Folge mit Zerlegungen der Forderung  $\tilde{H}$  beschäftigen, dies ermöglicht es den Wertprozess einer lokal risikominimierenden Handelsstrategie als bedingte Erwartung von  $(H)$  nach einem signierten normierten Maß  $\hat{Q}$  darzustellen, d.h.

$$\tilde{V}_t(\hat{\phi}) = E_{\hat{Q}}[\tilde{H} | \mathcal{F}_t].$$

Von zentraler Bedeutung ist dabei eine Verallgemeinerung der Kunita-Watanabe Zerlegung, die Orthogonal-Zerlegung (Föllmer-Schweizer Zerlegung).

**Lemma 1.40.** *Es existiert genau dann eine lokal risikominimierende Handelsstrategie  $\hat{\phi} = (\hat{\phi}^0, \hat{\phi}^1)$ , wenn es eine Zerlegung von  $\tilde{H}$  der Form*

$$\tilde{H} = c + \sum_{t=1}^T \phi_t^1 \Delta \tilde{S}_t^1 + L_T$$

*gibt. Dabei ist  $c \in \mathbb{R}$ ,  $\phi^1$  ist ein vorhersagbarer Prozess mit*

$$\phi_t \Delta \tilde{S}_t^1 \in \mathcal{L}^2 \quad \forall t \in \{0, \dots, T\},$$

*und  $L$  ist ein quadratintegrierbares  $P$ -Martingal, das stark orthogonal zu  $\tilde{S}^1$  ist und  $L_0 = 0$  erfüllt. In diesem Fall ist die lokal risikominimierende Handelsstrategie  $\hat{\phi} = (\hat{\phi}^0, \hat{\phi}^1)$  gegeben durch*

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_t^1 &:= \phi_t \\ \hat{\phi}_0^0 &:= c \\ \hat{\phi}_t^0 &:= c + \sum_{s=1}^t \phi_s^1 \Delta \tilde{S}_s^1 + L_t - \phi_t^1 \tilde{S}_t^1 \quad \forall t \in \{1, \dots, T\} \end{aligned}$$

*Die Zerlegung ist eindeutig in dem Sinne, dass  $L$  eindeutig bestimmt ist.*

*Beweis.* "  $\Rightarrow$  " : Sei  $\hat{\phi} = (\hat{\phi}^0, \hat{\phi}^1)$  eine lokal risikominimierende Handelsstrategie mit Kostenprozess  $\tilde{C}(\hat{\phi})$ . Wir setzen

$$L_t := \tilde{C}_t(\hat{\phi}) - \tilde{C}_0(\hat{\phi}).$$

Aus Satz 1.37 folgt, dass  $L$  ein quadratintegrierbares  $P$ -Martingal ist, das stark orthogonal zu  $\tilde{S}^1$  ist und  $L_0 = 0$  erfüllt. Die gewünschte Zerlegung folgt durch Einsetzen.

"  $\Leftarrow$  " : Sei die Zerlegung gegeben. Der Kostenprozess von  $\hat{\phi} = (\hat{\phi}^0, \hat{\phi}^1)$  hat die Form

$$\tilde{C}_t(\hat{\phi}) = c + L_t.$$

$\tilde{C}(\hat{\phi})$  ist ein  $P$ -Martingal und stark orthogonal zu  $\tilde{S}^1$ ,  $\hat{\phi} = (\hat{\phi}^0, \hat{\phi}^1)$  ist damit nach Satz 1.37 eine lokal risikominimierende Handelsstrategie. Zu zeigen bleibt die Eindeutigkeit von  $L$ , nehmen wir dazu an, es gebe eine zweite Zerlegung von  $\tilde{H}$  in den Termen  $\bar{\phi}^1$  und  $\bar{L}$ . Wir setzen

$$N_t := L_t - \bar{L}_t = \sum_{s=1}^t (\bar{\phi}_s^1 - \phi_s^1) \Delta \tilde{S}_s^1.$$

$N$  ist ein quadratintegrierbares  $P$ -Martingal und stark orthogonal zu  $\tilde{S}^1$ . Es folgt  $\forall t$

$$E[(\bar{\phi}_t^1 - \phi_t^1) \Delta \tilde{S}_t^1 \Delta \tilde{S}_t^1 | \mathcal{F}_{t-1}] = 0$$

Multiplikation mit  $\bar{\phi}_t^1 - \phi_t^1$  liefert

$$0 = E[(\bar{\phi}_t^1 - \phi_t^1) \Delta \tilde{S}_t^1]^2 | \mathcal{F}_{t-1}] = E[(N_t - N_{t-1})^2 | \mathcal{F}_{t-1}].$$

$N_0 = 0$  ist nach Konstruktion erfüllt, es folgt

$$N_t = N_0 = 0 \quad P\text{-f.s.}$$

und damit die Eindeutigkeit von  $L$ . □

Ist das objektive Maß  $P$  ein Martingalmaß, erhalten wir folgendes Ergebnis:

**Korollar 1.41.** *Sei  $\tilde{S}^1$  ein quadratintegrierbares  $P$ -Martingal. Dann existiert eine lokal risikominimierende Handelsstrategie  $\hat{\phi} = (\hat{\phi}^0, \hat{\phi}^1)$ , diese ist eindeutig in dem Sinne, dass der Wertprozess*

$$\tilde{V}_t(\hat{\phi}) = E[\tilde{H} | \mathcal{F}_t] \quad \forall t \in \{0, \dots, T\} \quad (1.31)$$

*eindeutig bestimmt ist. Der Kostenprozess hat die Form*

$$\tilde{C}_t(\hat{\phi}) = \tilde{V}_0(\hat{\phi}) + L_t \quad \forall t \in \{0, \dots, T\}$$

*wobei  $L$  das stark orthogonale  $P$ -Martingal aus der Orthogonal-Zerlegung von  $\tilde{H}$  ist.*

*Beweis.* Ist  $\tilde{S}^1$  ein  $P$ -Martingal, dann gilt

$$0 = E[\Delta \tilde{S}_t^1 | \mathcal{F}_{t-1}]^2 \leq C \text{Var}[\Delta \tilde{S}_t^1 | \mathcal{F}_{t-1}] \quad \forall t \in \{1, \dots, T\},$$

d.h. (1.3) ist erfüllt. Aus Satz 1.38 folgt die Existenz einer lokal risikominimierenden Handelsstrategie  $\hat{\phi}$ . Aus Lemma 1.40 folgt die Existenz der Orthogonal-Zerlegung von  $\tilde{H}$ . Die beiden Aussagen folgen nun durch Bedingung der Orthogonal-Zerlegung sowie der Eindeutigkeit des quadratintegrierbaren  $P$ -Martingals  $L$ . □

*Bemerkung 1.42.* Korollar 1.41 lässt sich auch über die Verwendung der Kunita-Watanabe Zerlegung beweisen. Ist  $P$  ein Martingalmaß existiert die Kunita-Watanabe Zerlegung von  $\tilde{H}$  gemäß Satz 3.3. Diese entspricht der Orthogonalzerlegung, nach Lemma 1.40 existiert eine lokal risikominimierende Handelsstrategie, die (1.31) erfüllt. Dieser Beweis wäre in einem mehrdimensionalen Finanzmarktmodell vorzuziehen, da es keine äquivalente Bedingung zu (1.3) gibt. (1.31) ermöglicht es uns,  $\tilde{V}(\hat{\phi})$  als fairen Preis von  $\tilde{H}$  zum Zeitpunkt  $t$  zu interpretieren. Zur Verallgemeinerung lassen wir die Annahme  $P$  wäre ein Martingalmaß fallen und konstruieren ein signiertes Martingalmaß, das (1.31) erfüllt.

Wir beziehen uns nun im Folgenden wieder auf [1].

**Proposition 1.43.** *Sei die Bedingung (1.3) erfüllt und  $(\hat{\phi}^0, \hat{\phi}^1)$  eine lokal risikominimierende Handelsstrategie. Sei die Orthogonalzerlegung von  $\tilde{H}$  durch*

$$\tilde{H} = H_0 + \sum_{t=1}^T \hat{\phi}_t^1 \Delta \tilde{S}_t^1 + L_T$$

gegeben. Desweiteren sei die Doob-Zerlegung von  $\tilde{S}^1$  gegeben durch

$$\tilde{S}^1 = \tilde{S}_0^1 + Y + B,$$

$B$  bezeichne dabei den quadratintegrierbaren vorhersagbaren Prozess und  $Y$  das quadratintegrierbare  $P$ -Martingal. Wir definieren das signierte Martingalmaß  $\hat{Q}$  mit Dichte

$$\frac{d\hat{Q}}{dP} := \hat{Z}_T$$

wobei  $\hat{Z}_T$  gegeben ist über

$$\hat{Z}_t := \prod_{s=1}^t \frac{1 - \xi_s \Delta \tilde{S}_s^1}{1 - \xi_s \Delta B_s}$$

mit

$$\xi_t := \frac{\Delta B_t}{E[(\Delta \tilde{S}_t^1)^2 | \mathcal{F}_{t-1}]}.$$

Für  $\hat{Q}$  gilt

$$E\left[\frac{d\hat{Q}}{dP} \Delta \tilde{S}_t^1 | \mathcal{F}_{t-1}\right] = 0 \quad P\text{-f.s. } \forall t \in \{0, \dots, T\} \quad (1.32)$$

*Beweis.* Wir zeigen, dass  $\hat{Z}$  ein quadratintegrierbares  $P$ -Martingal ist, das (1.32) erfüllt. Es gilt

$$E[\Delta \hat{Z}_t | \mathcal{F}_{t-1}] = \hat{Z}_{t-1} E\left[\frac{1 - \xi_t \Delta \tilde{S}_t^1}{1 - \xi_t \Delta B_t} - 1 | \mathcal{F}_{t-1}\right] = \hat{Z}_{t-1} \left(\frac{1 - \xi_t \Delta B_t}{1 - \xi_t \Delta B_t} - 1\right) = 0 \quad P\text{-f.s.}$$

Die Quadratintegrierbarkeit folgt aus der Quadratintegrierbarkeit von  $\tilde{S}^1$  und  $B$ . Wir definieren

$$\lambda_t = \frac{-E[\Delta \tilde{S}_t^1 | \mathcal{F}_{t-1}]}{Var[\Delta \tilde{S}_t^1 | \mathcal{F}_{t-1}]},$$

sowie den Prozess  $\Lambda_t$  über

$$\Delta\Lambda_t = \lambda_t \Delta Y_t.$$

$\hat{Z}$  besitzt die Darstellung

$$\hat{Z}_t = \prod_{s=1}^t (1 + \lambda_s \Delta Y_s) = \prod_{s=1}^t (1 + \Delta\Lambda_s) \quad \forall t$$

da

$$\begin{aligned} \prod_{s=1}^t (1 + \lambda_s \Delta Y_s) &= \prod_{s=1}^t \frac{\text{Var}[\Delta\tilde{S}_s^1 | \mathcal{F}_{s-1}] - (\Delta Y_s) E[\Delta\tilde{S}_s^1 | \mathcal{F}_{s-1}]}{\text{Var}[\Delta\tilde{S}_s^1 | \mathcal{F}_{s-1}]} \\ &= \prod_{s=1}^t \frac{E[(\Delta\tilde{S}_s^1)^2 | \mathcal{F}_{s-1}] - (\Delta B_s)^2 - (\Delta Y_s) E[\Delta\tilde{S}_s^1 | \mathcal{F}_{s-1}]}{\text{Var}[\Delta\tilde{S}_s^1 | \mathcal{F}_{s-1}]} \end{aligned}$$

$\Delta B_s = E[\Delta\tilde{S}_s^1 | \mathcal{F}_{s-1}]$  liefert

$$\begin{aligned} &= \prod_{s=1}^t \frac{E[(\Delta\tilde{S}_s^1)^2 | \mathcal{F}_{s-1}] - E[\Delta\tilde{S}_s^1 | \mathcal{F}_{s-1}](\Delta B_s + \Delta Y_s)}{\text{Var}[\Delta\tilde{S}_s^1 | \mathcal{F}_{s-1}]} \\ &= \prod_{s=1}^t \frac{E[(\Delta\tilde{S}_s^1)^2 | \mathcal{F}_{s-1}] - E[\Delta\tilde{S}_s^1 | \mathcal{F}_{s-1}](\Delta\tilde{S}_s^1)}{E[(\Delta\tilde{S}_s^1)^2 | \mathcal{F}_{s-1}] - (E[\Delta\tilde{S}_s^1 | \mathcal{F}_{s-1}])^2} \\ &= \prod_{s=1}^t \frac{1 - \frac{\Delta\tilde{S}_s^1 E[\Delta\tilde{S}_s^1 | \mathcal{F}_{s-1}]}{E[(\Delta\tilde{S}_s^1)^2 | \mathcal{F}_{s-1}]}}{1 - \frac{E[\Delta\tilde{S}_s^1 | \mathcal{F}_{s-1}]^2}{E[(\Delta\tilde{S}_s^1)^2 | \mathcal{F}_{s-1}]}} = \prod_{s=1}^t \frac{1 - \xi_s \Delta\tilde{S}_s^1}{1 - \xi_s \Delta B_s} = \hat{Z}_t \end{aligned}$$

$\Lambda$  ist ein quadratintegrierbares P-Martingal. Wegen Proposition 3.5 ist  $\hat{Z}$  ein P-Martingal und  $\hat{Q}$  ein zu P absolut stetiges signiertes Maß (aber kein äquivalentes Maß da die Positivität von  $\hat{Z}$  nicht gegeben ist). (1.32) folgt aus

$$\begin{aligned} E\left[\frac{d\hat{Q}}{dP} \Delta\tilde{S}_t^1 | \mathcal{F}_{t-1}\right] &= \frac{\hat{Z}_{t-1}}{1 - \xi_t \Delta B_t} E[(1 - \xi_t \Delta\tilde{S}_t^1) \Delta\tilde{S}_t^1 | \mathcal{F}_{t-1}] \\ &= \frac{\hat{Z}_{t-1}}{1 - \xi_t \Delta B_t} E[\Delta\tilde{S}_t^1 - \Delta B_t | \mathcal{F}_{t-1}] = 0 \quad P\text{-f.s.} \end{aligned}$$

□

**Satz 1.44.** Der Wertprozess von  $\hat{\phi} = (\hat{\phi}^0, \hat{\phi}^1)$  erfüllt

$$\tilde{V}_t(\hat{\phi}) = E_{\hat{Q}}[\tilde{H} | \mathcal{F}_{t-1}] \quad P\text{-f.s. } \forall t \in \{1, \dots, T\} \quad (1.33)$$

Die Konstante  $H_0$  in der Orthogonalzerlegung von  $\tilde{H}$  ist gegeben durch

$$H_0 = E[\tilde{H} \prod_{s=1}^T \frac{1 - \xi_s \Delta\tilde{S}_s^1}{1 - \xi_s \Delta B_s}] = E_{\hat{Q}}[\tilde{H}] \quad (1.34)$$

*Beweis.* Per Konstruktion der lokal risikominimierenden Handelsstrategie besitzt  $\tilde{V}(\hat{\phi})$  folgende Form

$$\tilde{V}_t(\hat{\phi}) = H_0 + \sum_{s=1}^t \hat{\phi}_s^1 \Delta \tilde{S}_s^1 + L_s$$

sowie

$$\tilde{V}_T(\hat{\phi}) = \tilde{H} \quad P\text{-f.s.}$$

Können wir zeigen, dass  $\tilde{V}_t(\hat{\phi})$  ein  $\hat{Q}$  Martingal ist im Sinne von Definition 1.28, folgt (1.33). Wir erhalten

$$\begin{aligned} E\left[\frac{d\hat{Q}}{dP} \Delta \tilde{V}_t(\hat{\phi}) | \mathcal{F}_{t-1}\right] &= E[\hat{Z}_t(\hat{\phi}_t^1 \Delta \tilde{S}_t^1 + \Delta L_t) | \mathcal{F}_{t-1}] \\ &= \hat{\phi}_t^1 E[\hat{Z}_t \Delta \tilde{S}_t^1 | \mathcal{F}_{t-1}] + E[\hat{Z}_{t-1} \frac{1 - \xi_t(\Delta Y_t + \Delta B_t)}{1 - \xi_t \Delta B_t} \Delta L_t | \mathcal{F}_{t-1}] \\ &= \hat{Z}_{t-1} E[\Delta L_t | \mathcal{F}_{t-1}] - \frac{\xi_t}{1 - \xi \Delta B_t} E[(\Delta L_t)(\Delta Y_t) | \mathcal{F}_{t-1}] = 0 \quad P\text{-f.s.} \end{aligned}$$

wobei letzterer Term auf Grund der starken Orthogonalität von  $L$  zu  $\Delta \tilde{S}^1$  und damit zu  $Y$  verschwindet. Damit folgt die gewünschte Aussage. Wir zeigen (1.34) über Induktion nach  $t$ .  $L$  ist stark orthogonal zu  $\Delta \tilde{S}^1$  und es gilt die Identität

$$\Delta L_t = \Delta \tilde{V}_t(\hat{\phi}) - \hat{\phi}_t^1 \Delta \tilde{S}_t^1.$$

Daraus folgt

$$0 = E[(\Delta L_t)(\Delta \tilde{S}_t^1) | \mathcal{F}_{t-1}] = E[(\Delta \tilde{V}_t(\hat{\phi}) - \hat{\phi}_t^1 \Delta \tilde{S}_t^1) \Delta \tilde{S}_t^1 | \mathcal{F}_{t-1}].$$

Wir erhalten für  $\hat{\phi}_t^1$

$$\hat{\phi}_t^1 = \frac{E[\Delta \tilde{V}_t(\hat{\phi}) \Delta \tilde{S}_t^1 | \mathcal{F}_{t-1}]}{E[(\Delta \tilde{S}_t^1)^2 | \mathcal{F}_{t-1}]} \quad (1.35)$$

Weiters folgt aus der Martingaleigenschaft von  $L$

$$\begin{aligned} 0 &= E[\Delta L_t | \mathcal{F}_{t-1}] = E[\Delta \tilde{V}_t(\hat{\phi}) | \mathcal{F}_{t-1}] - \hat{\phi}_t^1 E[\Delta \tilde{S}_t^1 | \mathcal{F}_{t-1}] \\ &= E[\Delta \tilde{V}_t(\hat{\phi})(1 - \xi \Delta \tilde{S}_t^1) | \mathcal{F}_{t-1}] = E[\tilde{V}_t(\hat{\phi})(1 - \xi \Delta \tilde{S}_t^1) | \mathcal{F}_{t-1}] - \tilde{V}_{t-1}(\hat{\phi})(1 - \xi \Delta B_t). \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\tilde{V}_{t-1}(\hat{\phi}) = E[\tilde{V}_t \frac{1 - \xi_t \Delta \tilde{S}_t^1}{1 - \xi \Delta B_t} | \mathcal{F}_{t-1}]$$

(1.34) folgt mit

$$H_0 = E[\tilde{V}_0(\hat{\phi})]$$

□

*Bemerkung 1.45.* Satz (1.44) ermöglicht es, den Wertprozess der lokal risikominimierenden Handelsstrategie als bedingte Erwartung von  $\tilde{H}$  zum Zeitpunkt  $t$  zu interpretieren. Da  $\hat{Q}$  ein signiertes Maß ist, besteht allerdings die Möglichkeit, dass der Wertprozess negative Werte annimmt. Es stellt sich die Frage, unter welchen Bedingungen  $\hat{Q}$  ein Maß ist. Wir wissen aus Proposition 3.5, dass  $\Lambda_t = \lambda_t \Delta Y_t$

$$\Delta \Lambda_t > -1 \quad \forall t$$

erfüllen muss. Dies ist äquivalent zu folgender Eigenschaft:  $\forall t$  gilt

$$(\Delta \tilde{S}_t^1) E[\Delta \tilde{S}_t^1 | \mathcal{F}_{t-1}] < E[(\Delta \tilde{S}_t^1)^2 | \mathcal{F}_{t-1}] \quad P\text{-f.s.} \quad (1.36)$$

da

$$\begin{aligned} \text{Var}[\Delta \tilde{S}_t^1 | \mathcal{F}_{t-1}] > (\Delta Y_t) E[\Delta \tilde{S}_t^1 | \mathcal{F}_{t-1}] &\iff \\ E[(\Delta \tilde{S}_t^1)^2 | \mathcal{F}_{t-1}] > (\Delta Y_t) E[\Delta \tilde{S}_t^1 | \mathcal{F}_{t-1}] + E[\Delta \tilde{S}_t^1 | \mathcal{F}_{t-1}]^2 &= (\Delta \tilde{S}_t^1) E[\Delta \tilde{S}_t^1 | \mathcal{F}_{t-1}]. \end{aligned}$$

(1.36) ist eine starke Einschränkung an unser Modell,  $\Delta \tilde{S}_t^1$  muss dazu durch  $\mathcal{F}_{t-1}$ -messbare Terme beschränkt sein - im Allgemeinen ist  $\hat{Q}$  kein Wahrscheinlichkeitsmaß. Wir beenden diesen Abschnitt, indem wir einen Zusammenhang zwischen der varianzoptimalen Handelsstrategie  $(V_0^*, \phi_t^*)$  und der lokal risikominimierenden Handelsstrategie  $\hat{\phi} = (\hat{\phi}^0, \hat{\phi}^1)$  herstellen. Es sei hier nochmals erwähnt, dass Bedingung (1.3) die Existenz beider Handelsstrategien garantiert.

Zur Verkürzung der Notation definieren wir den Prozess

$$\gamma_t := \frac{E[(\Delta L_t)(\Delta \tilde{S}_t^1) \alpha_{t+1} | \mathcal{F}_{t-1}]}{E[(\Delta \tilde{S}_t^1)^2 \prod_{s=t+1}^T (1 - \beta_s \Delta \tilde{S}_s^1)^2 | \mathcal{F}_{t-1}]} \quad \forall t \in \{1, \dots, T\}. \quad (1.37)$$

Nach Konstruktion ist der Prozess vorhersagbar und wohldefiniert auf Grund von Proposition 1.23.

**Satz 1.46.** *Sei (1.3) erfüllt. Sei  $(V_0^*, \phi_t^*)$  eine varianzoptimale Handelsstrategie und  $\hat{\phi} = (\hat{\phi}^0, \hat{\phi}^1)$  eine lokal risikominimierende Handelsstrategie. Dann gilt*

$$\phi_t^* = \hat{\phi}_t^1 + \beta_t (\tilde{V}_{t-1}(\hat{\phi}) - V_0^* - \tilde{G}_{t-1}(\phi^*)) + \gamma_t \quad (1.38)$$

*Beweis.* Der Beweis basiert auf der bereits bekannten Darstellung (1.17)

$$\phi_t^* = \rho_t - \beta_t (V_0^* + \tilde{G}_{t-1}(\phi^*))$$

Wir verwenden die Orthogonalzerlegung von  $\tilde{H}$  sowie die analoge Darstellung für  $\tilde{V}_t(\hat{\phi})$ . Für den Zähler von  $\rho_t$  gilt

$$\begin{aligned} E[\tilde{H} \Delta \tilde{S}_t^1 \alpha_{t+1} | \mathcal{F}_{t-1}] &= \tilde{V}_{t-1}(\hat{\phi}) E[\Delta \tilde{S}_t^1 \alpha_{t+1} | \mathcal{F}_{t-1}] + \hat{\phi}_t^1 E[(\Delta \tilde{S}_t^1)^2 \alpha_{t+1} | \mathcal{F}_{t-1}] \\ &\quad + \sum_{l=t+1}^T E[\hat{\phi}_l^1 \Delta \tilde{S}_l^1 \Delta \tilde{S}_t^1 \alpha_{t+1} | \mathcal{F}_{t-1}] + E[(L_T - L_{t-1}) \Delta \tilde{S}_t^1 \alpha_{t+1} | \mathcal{F}_{t-1}]. \end{aligned}$$

Bedingung der Summe auf  $\mathcal{F}_{l-1}$  und (1.14) liefert

$$E[E[\hat{\phi}_l^1 \Delta \tilde{S}_l^1 \Delta \tilde{S}_l^1 \alpha_{t+1} | \mathcal{F}_{l-1}] | \mathcal{F}_{t-1}] = E[\hat{\phi}_l^1 \Delta \tilde{S}_l^1 E[\Delta \tilde{S}_l^1 \alpha_{t+1} | \mathcal{F}_{l-1}] | \mathcal{F}_{t-1}] = 0 \quad P\text{-f.s.}$$

Division durch den Nenner liefert

$$\rho_t = \beta_t \tilde{V}_{t-1}(\hat{\phi}) + \hat{\phi}_t^1 + \gamma_t.$$

wobei der erste Term aus der Definition von  $\beta$  folgt, den zweiten Term erhalten wir durch Bedingung auf  $\mathcal{F}_t$  und Anwendung von (1.10).  $\square$

*Bemerkung 1.47.* Ist  $P$  ein Martingalmaß, verschwinden die Prozesse  $\beta$  und  $\gamma$   $P$ -f.s. und die Maße  $\hat{Q}$  und  $Q^*$  stimmen mit  $P$  überein. Die Orthogonalzerlegung von  $\tilde{H}$  ist wie bereits in Bemerkung 1.42 erwähnt die Kunita-Watanabe-Zerlegung und es gelten die Identitäten

$$\phi^* = \hat{\phi}^1$$

sowie

$$H_0 = V_0^* = E[\tilde{H}].$$

Die Varianz des Hedgingfehlers bei Mean-Variance Hedging ist durch

$$E[(\tilde{H} - V_0^* - \tilde{G}_T(\phi^*))^2] = E[L_T^2]$$

gegeben.

*Bemerkung 1.48.* Um eine ökonomische Betrachtung zu erleichtern schreiben wir

$$\phi_t^* = \hat{\phi}_t^1 + \xi_t (\tilde{V}_{t-1}(\hat{\phi}) - V_0^* - \tilde{G}_{t-1}(\phi^*)) + ((\beta_t - \xi_t)(\tilde{V}_{t-1}(\hat{\phi}) - V_0^* - \tilde{G}_{t-1}(\phi^*)) + \gamma_t).$$

Der erste Term ist der Aktienanteil (respektive der Anteil im risikobehafteten Finanzgut) der lokal risikominimierenden Handelsstrategie und repräsentiert nach [1] die Aufwendungen, die nur für die Nachbildung der Forderung notwendig sind, ohne Betrachtung des mean-variance Kriteriums.

Der zweite Term

$$\frac{\Delta B_t}{E[(\Delta \tilde{S}_t^1)^2 | \mathcal{F}_{t-1}]} \left( (H_0 + \sum_{s=1}^{t-1} \hat{\phi}_s^1 \Delta \tilde{S}_s^1 + L_{t-1}) - V_0^* - \sum_{s=1}^{t-1} \phi_s^* \Delta \tilde{S}_s^1 \right)$$

ist eine mit  $\xi_t$  gewichtete Differenz zwischen dem Wert der lokal risikominimierenden Handelsstrategie sowie dem Wert der varianzoptimalen Handelsstrategie zum Zeitpunkt  $t - 1$ .  $\xi_t$  erfüllt

$$\xi_t = \frac{\Delta B_t}{E[(\Delta \tilde{S}_t^1)^2 | \mathcal{F}_{t-1}]} = \frac{E[\Delta \tilde{S}_t^1 | \mathcal{F}_{t-1}]}{E[(\Delta \tilde{S}_t^1)^2 | \mathcal{F}_{t-1}]},$$

dementsprechend interpretiert [2] den Term als die Aufwendungen, die durch das mean-variance-Konzept entstehen. Zur Betrachtung des dritten Terms definieren wir den mean-variance-tradeoff Prozess

$$W_t := \sum_{s=1}^t \frac{(\Delta B_s)^2}{\text{Var}[\Delta \tilde{S}_s^1 | \mathcal{F}_{s-1}]} \quad \forall t \in \{0, \dots, T\} \quad (1.39)$$

Nach [1] repräsentiert der dritte Term das Zusammenspiel zwischen dem nicht hedgbaren Anteil  $L$  sowie dem mean-variance-tradeoff Prozess  $W$ . Der Term verschwindet, wenn  $W \forall t$  deterministisch ist. In diesem Fall erhalten wir eine vereinfachte Darstellung von  $\phi^*$ , die die Grundlage für die explizite Berechnung der varianzoptimalen Handelsstrategie in Abschnitt 1.4 sein wird.

Wir bereiten über zwei technische Aussagen den Beweis des gewünschten Zusammenhangs zwischen  $\phi^*$  und  $\hat{\phi}^1$  vor.

**Lemma 1.49.** *Sei  $W_t$  deterministisch für alle  $t \in \{0, \dots, T\}$ . Dann gilt*

$$\xi_t \Delta B_t \text{ ist deterministisch } \forall t \quad (1.40)$$

sowie

$$E\left[\prod_{s=t}^T (1 - \xi_s \Delta \tilde{S}_s^1) \middle| \mathcal{F}_{t-1}\right] = \prod_{s=t}^T (1 - \xi_s \Delta B_s) \quad P\text{-f.s.} \quad (1.41)$$

*Beweis.* Wir betrachten

$$\begin{aligned} (1 - \xi_t \Delta B_t) &= 1 - \frac{E[\Delta \tilde{S}_t^1 | \mathcal{F}_{t-1}] E[\Delta B_t + \Delta Y_t | \mathcal{F}_{t-1}]}{E[(\Delta \tilde{S}_t^1)^2 | \mathcal{F}_{t-1}]} = \frac{\text{Var}[\Delta \tilde{S}_t^1 | \mathcal{F}_{t-1}]}{E[(\Delta \tilde{S}_t^1)^2 | \mathcal{F}_{t-1}]} \\ &= \left(1 + \frac{E[\Delta \tilde{S}_t^1 | \mathcal{F}_{t-1}]^2}{\text{Var}[\Delta \tilde{S}_t^1 | \mathcal{F}_{t-1}]}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Der letzte Term ist nach Voraussetzung deterministisch, es folgt (1.40).

Sei  $t$  fix, es gilt

$$E\left[\prod_{s=t}^T (1 - \xi_s \Delta \tilde{S}_s^1) \middle| \mathcal{F}_{T-1}\right] = (1 - \xi_T \Delta B_T) \prod_{s=t}^{T-1} (1 - \xi_s \Delta \tilde{S}_s^1). \quad (1.42)$$

(1.41) folgt aus (1.40) sowie Bedingung des zweiten Terms.  $\square$

**Lemma 1.50.** *Sei  $W_t$  deterministisch für alle  $t \in \{0, \dots, T\}$ . Dann gilt*

$$\beta_t = \xi_t \quad P\text{-f.s. } \forall t$$

und  $\hat{Q}$  und  $Q^*$  stimmen überein.

*Beweis.* Wir werden die Eigenschaften über Rückwärtsinduktion nachweisen, nach Konstruktion gilt

$$\beta_T = \xi_T \quad P\text{-f.s.}$$

Sei die Induktionshypothese für  $t+1$  erfüllt, Bedingung auf  $\mathcal{F}_t$  und (1.10) liefert

$$\beta_t = \frac{E[\Delta \tilde{S}_t^1 \alpha_{t+1} | \mathcal{F}_{t-1}]}{E[(\Delta \tilde{S}_t^1)^2 \prod_{s=t+1}^T (1 - \beta_s \Delta \tilde{S}_s^1)^2 | \mathcal{F}_{t-1}]} = \frac{E[\Delta \tilde{S}_t^1 \prod_{s=t+1}^T (1 - \xi_s \Delta \tilde{S}_s^1) | \mathcal{F}_{t-1}]}{E[(\Delta \tilde{S}_t^1)^2 \prod_{s=t+1}^T (1 - \xi_s \Delta \tilde{S}_s^1) | \mathcal{F}_{t-1}]}$$

Aus (1.41) folgt

$$\beta_t = \frac{E[\Delta\tilde{S}_t^1|\mathcal{F}_{t-1}] \prod_{s=t+1}^T (1 - \xi_s B_s)}{E[(\Delta\tilde{S}_t^1)^2|\mathcal{F}_{t-1}] \prod_{s=t+1}^T (1 - \xi_s B_s)} = \xi_t$$

Aus der Definition von  $\xi$  und (1.3) folgt

$$E[Z^0] = E\left[\prod_{s=1}^T (1 - \xi_s \Delta\tilde{S}_s^1)\right] = \prod_{s=1}^T (1 - \xi_s \Delta B_s) > 0. \quad (1.43)$$

und damit

$$Z^0 = \hat{Z}_T \quad P\text{-f.s.}$$

□

Wir können damit den letzten Satz dieses Abschnitts beweisen.

**Satz 1.51.** *Sei  $W_t$  deterministisch für alle  $t \in \{0, \dots, T\}$ , dann gilt*

$$\phi_t^* = \hat{\phi}_t^1 + \xi_t (\tilde{V}_{t-1}(\hat{\phi}) - V_0^* - \tilde{G}_{t-1}(\phi^*)) \quad P\text{-f.s. } \forall t \in \{1, \dots, T\} \quad (1.44)$$

*Beweis.* Wir zeigen, dass  $\gamma_t = 0 \quad \forall t$ . Sei  $t$  fix und  $s > t$ , aus Lemma 1.50 sowie Bedingung nach  $\mathcal{F}_s$  folgt

$$\begin{aligned} & E[\Delta L_s \Delta\tilde{S}_s^1 \alpha_{t+1} | \mathcal{F}_{s-1}] \\ &= E[\Delta L_s (1 - \xi_s \Delta\tilde{S}_s^1) E[\prod_{l=s+1}^T (1 - \xi_l \Delta\tilde{S}_l^1) | \mathcal{F}_s] | \mathcal{F}_{s-1}] \Delta\tilde{S}_t^1 \prod_{l=t+1}^{s-1} (1 - \xi_l \Delta\tilde{S}_l^1). \end{aligned}$$

Lemma 1.49 liefert

$$= E[\Delta L_s (1 - \xi_s \Delta\tilde{S}_s^1) | \mathcal{F}_{s-1}] \prod_{l=s+1}^T (1 - \xi_l \Delta B_l) \Delta\tilde{S}_t^1 \prod_{k=t+1}^{s-1} (1 - \xi_k \Delta\tilde{S}_k^1) = 0 \quad P\text{-f.s.}$$

Die letzte Gleichung folgt aus

$$E[\Delta L_s (1 - \xi_s \Delta\tilde{S}_s^1) | \mathcal{F}_{s-1}] = 0 \quad P\text{-f.s.}$$

da  $L$  ein  $P$ -Martingal und stark orthogonal zu  $\Delta\tilde{S}^1$  ist.

Analoges Vorgehen liefert uns

$$E[\Delta L_t \Delta\tilde{S}_t^1 \alpha_{t+1} | \mathcal{F}_{t-1}] = E[\Delta L_t \Delta\tilde{S}_t^1 | \mathcal{F}_{t-1}] \prod_{l=t+1}^T (1 - \xi_l \Delta B_l) = 0 \quad P\text{-f.s.}$$

Summation über  $s \geq t$  sowie Bedingen nach  $\mathcal{F}_{t-1}$  liefert

$$E[(L_T - L_{t-1}) \Delta\tilde{S}_t^1 \alpha_{t+1} | \mathcal{F}_{t-1}] = 0 \quad P\text{-f.s.}$$

Damit verschwindet der Zähler von  $\gamma$  und wir erhalten die gewünschte Eigenschaft. □

## 1.4 Fourieranalytische Methoden zur Berechnung der varianzoptimalen Hedge

Inhalt dieses Abschnitts ist die Berechnung des optimalen Startkapitals sowie der Varianz des Hedgingfehlers in diskretisierten exponentiellen Levymodellen. Die Modelle sind unvollständig und besitzen einen deterministischen mean-variance-tradeoff Prozess. Zur expliziten Berechnung verwenden wir eine zeitdiskrete Formulierung von Satz 2.35, Ziel ist es die Ergebnisse von [12], *Kapitel 5* nachzuvollziehen sowie auf das Merton Sprung-Diffusionsmodell zu erweitern. Grafiken und Tabellen befinden sich am Ende des Abschnitts.

**Definition 1.52.** *Wir betrachten im folgenden ein  $T$ -Periodenmodell mit Zeithorizont  $\{0, \dots, T\}$  mit  $T \in \mathbb{R}$ . Dem Modell liegt ein Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  und eine den Informationsverlauf beschreibende Filtration  $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \{0, \dots, T\}}$  zugrunde. Es gilt dabei:*

$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}.$$

Der risikolose Bond  $S^0 = (S_t^0)_{t \in \{0, \dots, T\}}$  besitzt die Darstellung

$$S_t^0 = e^{rt}$$

mit  $r \in \mathbb{R}$ .

Der diskontierte Wert der Aktie  $\tilde{S}^1 = (\tilde{S}_t^1)_{t \in \{0, \dots, T\}}$  ist durch

$$\tilde{S}_t^1 = S_0^1 e^{X_t}$$

gegeben. Der Prozess  $X = (X_t)_{t \in \{0, \dots, T\}}$  ist reellwertig und erfüllt folgende Eigenschaften:

- $X$  ist  $\mathcal{F}$ -adaptiert.
- $X_0 = 0$ .
- $\Delta X_t = {}^d \Delta X_s \quad \forall t, s \in \{1, \dots, T\}$ .
- $E[\Delta X_t | \mathcal{F}_{t-1}] = E[\Delta X_t] \quad \forall t \in \{1, \dots, T\}$ .
- $E[e^{2X_1}] < \infty$ .

*Bemerkung 1.53.*  $\tilde{S}^1$  besitzt einen deterministischen mean-variance-tradeoff-Prozess, da

$$\begin{aligned} E[\Delta \tilde{S}_t^1 | \mathcal{F}_{t-1}] &= \tilde{S}_{t-1}^1 E[e^{\Delta X_t} | \mathcal{F}_{t-1}] = \tilde{S}_{t-1}^1 E[e^{\Delta X_t}] \\ \text{Var}[\Delta \tilde{S}_t^1 | \mathcal{F}_{t-1}] &= (\tilde{S}_{t-1}^1)^2 \text{Var}[e^{2\Delta X_t} | \mathcal{F}_{t-1}] = (\tilde{S}_{t-1}^1)^2 \text{Var}[e^{2\Delta X_t}]. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$W_t = \sum_{s=1}^t \frac{(\tilde{S}_{s-1}^1 E[e^{\Delta X_s}])^2}{(\tilde{S}_{s-1}^1)^2 \text{Var}[e^{2\Delta X_s}]} = t \frac{E[e^{\Delta X_t}]^2}{\text{Var}[e^{2\Delta X_t}]}.$$

Im weiteren Verlauf folgen wir den Ausführungen in [12], *Kapitel 2*. Ziel ist die explizite Berechnung der Orthogonalzerlegung einer Forderung  $\tilde{H}$ , Satz 1.51 liefert uns eine Darstellung der varianzoptimalen Hedge.

**Definition 1.54.** Sei  $H$  eine quadratintegrierbare europäische Forderung.  $H$  ist zulässig wenn  $\tilde{H} = f(\tilde{S}_T^1)$  und

$$f(s) = \int s^z \Pi(dz)$$

für ein endliches, komplexes Maß  $\Pi$  auf  $\{z \in \mathbb{C} | a \leq \operatorname{Re}[z] \leq b\}$  erfüllt ist.  $a, b \in \mathbb{R}$  werden derart ausgewählt, dass

$$E[e^{2aX_1}] < \infty \quad \text{und} \quad E[e^{2bX_1}] < \infty$$

erfüllt ist.

**Lemma 1.55.** Eine europäische Calloption  $\tilde{H} = (\tilde{S}_T^1 - e^{-rT}K)_+$  mit Ausübungspreis  $K > 0$  besitzt die Darstellung

$$f_p(s) = (s - \tilde{K})_+ = \frac{1}{2\pi i} \int_{R-i\infty}^{R+i\infty} s^z \frac{\tilde{K}^{1-z}}{z(z-1)} dz \quad \forall s > 0,$$

dabei ist  $R > 1$  beliebig und  $\tilde{K} = e^{-rT}K$  der diskontierte Ausübungspreis.

*Beweis.* Für  $\operatorname{Re}[z] > 1$  gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} (e^x - \tilde{K})_+ e^{-zx} dx = \frac{\tilde{K}^{1-z}}{z(z-1)}.$$

Die Aussage folgt aus Satz 3.22. □

**Lemma 1.56.** Sei  $z \in \mathbb{C}$  derart, dass  $(\tilde{S}_1^1)^z \in \mathcal{L}^2$  erfüllt ist. Für die durch

$$H(z) := (\tilde{S}_T^1)^z$$

definierte Zufallsvariable  $H(z)$  gilt:

$H(z)$  besitzt eine durch

$$H(z) = H(z)_0 + \sum_{t=1}^T \phi^1(z)_t \Delta \tilde{S}_t^1 + L(z)_T \tag{1.45}$$

gegebene Orthogonalzerlegung mit

$$\begin{aligned} H(z)_t &= h(z)^{T-t} (\tilde{S}_t^1)^z \\ \phi^1(z)_t &= g(z) h(z)^{T-t} (\tilde{S}_{t-1}^1)^{z-1} \\ L(z)_t &= H(z)_t - H(z)_0 - \sum_{s=1}^t \phi^1(z)_s \Delta \tilde{S}_s^1 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} h(z) &:= m(z) - (m(1) - 1)g(z) \\ g(z) &:= \frac{m(z+1) - m(1)m(z)}{m(2) - m(1)^2} \\ m(z) &:= E[e^{zX_1}]. \end{aligned}$$

*Beweis.* Per Voraussetzung ist Bedingung (1.3) erfüllt, nach Satz 1.38 und Lemma 1.40 besitzt  $H(z)$  eine eindeutige Orthogonalzerlegung. Ist  $L(z)$  ein zu  $\tilde{S}^1$  stark orthogonales P-Martingal, so ist die Orthogonalzerlegung über (1.45) gegeben.

Es gilt

$$\begin{aligned} E[\Delta L(z)_t | \mathcal{F}_{t-1}] &= E[(\tilde{S}_t^1)^z h(z)^{T-t} - (\tilde{S}_{t-1}^1)^z h(z)^{T-t+1} - g(z)h(z)^{T-t} (\tilde{S}_{t-1}^1)^z \Delta \tilde{S}_t^1 | \mathcal{F}_{t-1}] \\ &= (\tilde{S}_{t-1}^1)^z h(z)^{T-t} E[e^{z\Delta X_t} - h(z) - g(z)(e^{\Delta X_t} - 1)] \\ &= (\tilde{S}_{t-1}^1)^z h(z)^{T-t} E[m(z) - g(z)(m(1) - 1) - h(z)] = 0, \end{aligned}$$

damit ist  $L(z)$  ein P-Martingal. Sei die Doob-Zerlegung von  $\tilde{S}^1$  durch

$$\tilde{S}^1 = S_0^1 + Y + B$$

gegeben.  $Y = (Y_t)_{t \in \{0, \dots, T\}}$  ist ein quadratintegrierbares P-Martingal und  $B = (B_t)_{t \in \{0, \dots, T\}}$  ein quadratintegrierbarer, vorhersagbarer Prozess. Nach Proposition 1.18 gilt

$$\Delta Y_t = \Delta \tilde{S}_t^1 - E[\Delta \tilde{S}_t^1 | \mathcal{F}_{t-1}] = \tilde{S}_{t-1}^1 (e^{\Delta X_t} - E[e^{\Delta X_t}]).$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} E[(\Delta Y_t)(\Delta L(z)_t) | \mathcal{F}_{t-1}] &= (\tilde{S}_{t-1}^1)^{z+1} h(z)^{T-t} E[(e^{\Delta X_t} - m(1))(e^{z\Delta X_t} - h(z) - g(z)(e^{\Delta X_t} - 1))] \\ &= (\tilde{S}_{t-1}^1)^{z+1} h(z)^{T-t} E[e^{\Delta X_t} (e^{z\Delta X_t} - h(z) - g(z)(e^{\Delta X_t} - 1))] \\ &= (\tilde{S}_{t-1}^1)^{z+1} h(z)^{T-t} (m(z+1) - m(1)h(z) - g(z)m(1)(m(1) - 1)) = 0 \end{aligned}$$

und damit die starke Orthogonalität von  $L(z)$ .  $\square$

**Korollar 1.57.** Jede zulässige Forderung  $\tilde{H} = f(\tilde{S}_T^1)$  besitzt eine Orthogonalzerlegung der Form

$$\tilde{H} = H_0 + \sum_{s=1}^T \phi_s^1 \Delta \tilde{S}_s^1 + L_T,$$

mit

$$\begin{aligned} H_t &= \int H(z)_t \Pi(dz) \\ \phi_t^1 &= \int \phi^1(z)_t \Pi(dz) \\ L_t &= \int L(z)_t \Pi(dz) = H_t - H_0 - \sum_{s=1}^t \phi_s^1 \Delta \tilde{S}_s^1. \end{aligned}$$

Die Prozesse  $H, \phi^1$  und  $L$  sind reellwertig.

*Beweis.* Wir zeigen, dass  $L = (L_t)_{t \in \{0, \dots, T\}}$  ein zu  $\tilde{S}^1$  stark orthogonales P-Martingal ist. Die totale Variation des komplexen Maßes  $\Pi$  nach Definition 3.23 ist ein positives Maß und es gilt

$$\int E[|\Delta L(z)_t|^2] |\Pi|(dz) < \infty.$$

Damit sind die Voraussetzungen für Fubini erfüllt, aus der Martingaleigenschaft von  $L(z)$  folgt für  $A \in \mathcal{F}_{t-1}$

$$\begin{aligned} \int_A \Delta L_t dP &= \int_A \int \Delta L(z)_t \Pi(dz) = \int \int_B \Delta L(z)_t dP \Pi(dz) = 0 \\ &\Rightarrow E[\Delta L_t | \mathcal{F}_{t-1}] = 0. \end{aligned}$$

Die starkte Orthogonalität folgt durch analoges Vorgehen für  $ML$ .

Zu zeigen bleibt, dass  $H, \phi^1$  und  $L$  reellwertige Prozesse sind, wir notieren die komplex Konjugierte eines Prozesses mit einem Balken. Per Voraussetzung sind  $\tilde{S}^1$  und damit  $\tilde{H}$  reellwertig, es folgt

$$\begin{aligned} 0 = \tilde{H} - \overline{\tilde{H}} &= H_0 - \overline{H_0} + \sum_{s=1}^T (\phi_s^1 - \overline{\phi_s^1}) \Delta \tilde{S}_s^1 + L_T - \overline{L_T} \\ &= 2i(\text{Im}[H_0] + \sum_{s=1}^T \text{Im}[\phi_s^1] \Delta \tilde{S}_s^1 + \text{Im}[L_T]). \end{aligned}$$

Die Orthogonalzerlegung von 0 ist eindeutig, es folgt die gewünschte Eigenschaft.  $\square$

*Bemerkung 1.58.* Korollar 1.57 ermöglicht eine explizite Berechnung der lokal risikominimierenden Hedge  $(\hat{\phi}^0, \hat{\phi}^1)$  für zulässige Forderungen (im Speziellen europäische Call/Put-Optionen) über

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_t^1 &= \int \phi^1(z)_t \Pi(dz) \\ \hat{\phi}_t^0 &= \int H(z)_0 \Pi(dz) + \sum_{s=1}^t \hat{\phi}_s^1 \Delta \tilde{S}_s^1 + \int L(z)_t \Pi(dz) - \hat{\phi}_t^1 \tilde{S}_t^1. \end{aligned}$$

Der Zusammenhang zwischen lokal risikominimierender und varianzoptimaler Hedge aus Satz 1.51 ermöglicht eine explizite Berechnung der varianzoptimalen Handelsstrategie.

**Satz 1.59.** *Sei  $\tilde{H}$  eine zulässige Forderung nach Definition 1.54. Dann ist die varianzoptimale Handelsstrategie  $(V_0^*, \phi^*)$  durch*

$$V_0^* = H_0 \tag{1.46}$$

und

$$\phi_t^* = \hat{\phi}_t^1 + \frac{\lambda}{\tilde{S}_{t-1}^1} (H_{t-1} - V_0^* - \tilde{G}_{t-1}(\phi^*)) \tag{1.47}$$

gegeben, wobei

$$\lambda := \frac{m(1) - 1}{m(2) - 2m(1) - m(1)^2}$$

und  $\tilde{G}(\phi^*)$  den diskontierten Wertentwicklungsprozess von  $\phi^*$  bezeichnet.  $(V_0^*, \phi^*)$  ist  $P$ -f.s. eindeutig.

*Beweis.* Die Darstellungen für  $\phi^*$  folgt aus Satz 1.51 und

$$\xi_t = \frac{E[\Delta \tilde{S}_t^1 | \mathcal{F}_{t-1}]}{E[(\tilde{S}_t^1)^2 | \mathcal{F}_{t-1}]} = \frac{\tilde{S}_{t-1}^1 (E[e^{\Delta X_t}] - 1)}{(\tilde{S}_{t-1}^1)^2 (E[e^{2\Delta X_t}] - 2E[e^{\Delta X_t}] + 1)} = \frac{\lambda}{\tilde{S}_{t-1}^1},$$

die Darstellung von  $V_0^*$  folgt aus Lemma 1.50. Zu zeigen bleibt die Eindeutigkeit von  $(V_0^*, \phi^*)$ , bezeichne dazu  $(V_0', \phi')$  eine zweite varianzoptimale Handelsstrategie. Wir definieren

$$\bar{V}_0 := \frac{1}{2}(V_0^* + V_0') \quad \bar{\phi}_t = \frac{1}{2}(\phi_t^* + \phi_t').$$

Aus

$$E[(\bar{V}_0 + \tilde{G}(\bar{\phi})_T - \tilde{H})^2] \leq \frac{1}{2}(E[(V_0^* + \tilde{G}(\phi^*)_T - \tilde{H})^2] + E[(V_0' + \tilde{G}(\phi')_T - \tilde{H})^2])$$

folgt:  $(V_0^*, \phi^*)$  und  $(V_0', \phi')$  sind genau dann varianzoptimal, wenn

$$V_0^* + \tilde{G}(\phi^*)_T - V_0' - \tilde{G}(\phi')_T = V_0^* - V_0' + \tilde{G}(\phi^* - \phi')_T = 0 \quad P\text{-f.s.}$$

erfüllt ist. Es folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \text{Var}[V_0' - V_0^* | \mathcal{F}_{T-1}] = \text{Var}[\tilde{G}(\phi^* - \phi')_T | \mathcal{F}_{T-1}] \\ &= \text{Var}[(\phi_T^* - \phi_T') \Delta \tilde{S}_T^1 | \mathcal{F}_{T-1}] \\ &= (\phi_T^* - \phi_T')^2 (\tilde{S}_{T-1}^1)^2 \text{Var}[e^{\Delta X_T}] \end{aligned}$$

und damit

$$\phi_T^* - \phi_T' = 0 \quad P\text{-f.s.}$$

Die Eindeutigkeit folgt durch Rückwärtsinduktion. □

Neben der Berechnung der varianzoptimalen Handelsstrategie ist die Varianz des Hedgingfehlers von Interesse, wir geben dazu folgenden Satz aus [12], *Kapitel 2* an.

**Satz 1.60.** *Die Varianz des Hedgingfehlers  $J_0$  ist durch*

$$J_0 = \int \int J_0(x, y) \Pi(dy)(dz)$$

gegeben, wobei

$$J_0(y, z) := \begin{cases} (\tilde{S}_0^1)^{y+z} \beta(y, z) \frac{\alpha(y, z)^T - m(y+z)^T}{\alpha(y, z) - m(y+z)}, & \text{wenn } \alpha(y, z) \neq m(y+z) \\ (\tilde{S}_0^1)^{y+z} \beta(y, z) T m(y+z)^{T-1}, & \text{wenn } \alpha(y, z) = m(y+z) \end{cases}$$

sowie

$$\begin{aligned} \alpha(y, z) &:= h(y)h(z) \frac{m(2) - m(1)^2}{m(2) - 2m(1) + 1} \\ \beta(y, z) &:= m(y+z) - (m(2)m(y)m(z) - m(1)m(y+1)m(z) \\ &\quad - m(1)m(y)m(z+1) + m(y+1)m(z+1)) \frac{1}{m(2) - m(1)^2} \end{aligned}$$

*Beweis.* Siehe ([12], Kapitel 2, Satz 2.2) □

*Bemerkung 1.61.* Wir beenden diesen Abschnitt mit der Anwendung von Satz 1.59 auf vier zeitdiskrete exponentielle Lévy Modelle. Das zeitdiskrete Black-Scholes-Modell und das Varianz-Gamma-Modell wurden bereits in [12], Kapitel 5 behandelt, wir versuchen die Ergebnisse nachzuvollziehen und auf ein Merton-Sprung-Diffusionsmodell und ein Varianz-Gamma-Modell zu erweitern.

**Definition 1.62.** Wir betrachten im Folgenden vier diskretisierte exponentielle Lévy-Modelle mit Zeithorizont  $\{0, \dots, T\}$  und den äquidistanten Handelsszeitpunkten  $k \frac{T}{N}$  mit  $k \in \{0, \dots, N\}$ ,  $T \in \mathbb{R}$  und  $N \in \mathbb{N}$ . Der risikolose Bond  $S^0 = (S_t^0)_{t \in \{0, \frac{T}{N}, \dots, T\}}$  besitzt die Darstellung

$$S_t^0 := e^{rt}$$

mit  $r \in \mathbb{R}$ .

### Modell 1 (zeitdiskretes Black-Scholes-Modell):

Der diskontierte Wert der Aktie  $\tilde{S}^{BS} = (\tilde{S}_t^{BS})_{t \in \{0, \dots, T\}}$  ist durch

$$\tilde{S}_t^{BS} = S_0^1 e^{(\mu_{BS} - \frac{\sigma_{BS}^2}{2})t + \sigma_{BS} B_t},$$

gegeben.  $B = (B_t)_{t \in [0, T]}$  ist eine Standard-Brownsche Bewegung. Für die Parameter gilt:

$$\mu_{BS} = -0.1838 \quad \sigma_{BS}^2 = 0.0405 \quad S_0^1 = 100$$

### Modell 2 (zeitdiskretes Normal-Invers-Gauß-Modell):

Der diskontierte Wert der Aktie  $\tilde{S}^{NIG} = (\tilde{S}_t^{NIG})_{t \in \{0, \dots, T\}}$  ist durch

$$\tilde{S}_t^{NIG} = S_0^1 e^{X_t^{NIG}},$$

gegeben.  $X^{NIG} = (X_t^{NIG})_{t \in [0, T]}$  ist ein Normal-Invers-Gauß-Prozess mit charakteristischer Funktion

$$\phi_{NIG}(u)_t = \text{Exp}[t(\mu_{NIG} u + \delta_{NIG}(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} - \sqrt{\alpha_{NIG}^2 - (\beta_{NIG} + iu)^2})].$$

Für die Parameter gilt:

$$\mu_{NIG} = -0.04 \quad \alpha_{NIG} = 75.49 \quad \beta_{NIG} = -4.089 \quad \delta_{NIG} = 3.024 \quad S_0^1 = 100$$

**Modell 3 (zeitdiskretes Varianz-Gamma-Modell):**

Der diskontierte Wert der Aktie  $\tilde{S}^{VG} = (\tilde{S}_t^{VG})_{t \in \{0, \dots, T\}}$  ist durch

$$\tilde{S}_t^{VG} = S_0^1 e^{X_t^{VG}},$$

gegeben.  $X^{VG} = (X_t^{VG})_{t \in [0, T]}$  ist ein Varianz-Gamma-Prozess mit charakteristischer Funktion

$$\phi_{VG}(u)_t = \left( e^{\mu_{VG} i u} \left( \frac{\alpha_{VG}}{\alpha_{VG} - \beta u i - u^2/2} \right)^{\delta_{VG}} \right)^t.$$

Für die Parameter gilt:

$$\mu_{VG} = -0.1838 \quad \alpha_{VG} = 24.9597 \quad \beta_{VG} = -0.5051 \quad \delta_{VG} = 1 \quad S_0^1 = 100.$$

**Modell 4 (zeitdiskretes Merton-Sprung-Diffusionsmodell):**

Der diskontierte Wert der Aktie  $\tilde{S}^{JD} = (\tilde{S}_t^{JD})_{t \in \{0, \dots, T\}}$  ist durch

$$\tilde{S}_t^{JD} = S_0^1 e^{\mu_{JD} t + \sigma_{JD} B_t + \sum_{s=1}^{N_t} Y_s}$$

gegeben.  $B = (B_t)_{t \in [0, T]}$  ist eine Standard-Brownsche Bewegung, der Prozess  $Z = (Z_t)_{t \in [0, T]}$  mit

$$Z_t = \sum_{s=1}^{N_t} Y_s$$

beschreibt einen zusammengesetzten Poissonprozess mit Intensität  $\lambda_{JD} t$  und normalverteilten Sprüngen

$$Y_i \sim^{iid} \mathcal{N}(a, b^2) \quad \forall i.$$

Für die Parameter gilt:

$$\begin{aligned} \mu_{JD} &= -0.2 & \sigma_{JD} &= 0.1999 & a &= -0.1 \\ b &= 0.05 & \lambda_{JD} &= 0.0404 & S_0^1 &= 100. \end{aligned}$$

Die Parameterwahl von Modell 2 entspricht der Wahl von [12], Kapitel 5, die Modelle 1, 3 und 4 wurden derart parametrisiert, dass Erwartungswert und Varianz der Aktienpreise für alle  $t \in \{\frac{T}{N}, \dots, T\}$  übereinstimmen.

*Bemerkung 1.63.* Die verwendeten Lévy Prozesse erfüllen die Voraussetzungen aus Definition 1.52, im Speziellen sind die mean-variance-tradeoff-Prozesse deterministisch.

Ziel ist die Bepreisung einer europäischen Call mit Ausübungspreis  $K = 99$  und Laufzeit  $T = 0.25$  in den vier Modellen. Das optimale Anfangskapital ist jeweils über

$$V_0^* = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re}[(S_0^1)^{R+ui} h(R+ui)^N \frac{K^{1-R-ui}}{(R+ui)(R+ui-1)}] du.$$

gegeben, wir nutzen hierbei, dass der Integrand eine gerade Funktion ist. Für variierenden Aktienkurs  $S_0^1$  und  $N = 12$  vergleichen wir in Abbildung 1.1 das Anfangskapital  $V_0^*$  im zeitdiskreten Black-Scholes-Modell, dem Normal-Invers-Gauß-Modell und dem Sprungdiffusionsmodell mit dem fairen Black-Scholes-Preis bei zeitstetigem Hedging. Für die ersten beiden Modelle entsprechen unsere Ergebnisse den Resultaten von [12]. Optisch lässt sich kein wesentlicher Unterschied zwischen den Preisen feststellen, wie wir in Tabelle 4.2 sehen, wird  $V_0^*$  im zeitdiskreten Black-Scholes-Modell für  $N \in \{82, \dots, 120\}$  am höchsten gewählt. Für das Normal-Invers-Gauß-Modell erhalten wir nahe des Ausübungspreises  $K$  niedrigere Werte für  $V_0^*$ , für  $S_0^1 > K$  entspricht der Wert den Ergebnissen in den anderen beiden Modellen.

Abbildung (1.3) zeigt  $V_0^*$  für variierendes  $N$ ,  $K = 99$  und  $S_0^1 = 100$ . Für  $N = 8$  beträgt die Differenz zwischen dem fairen Black Scholes Preis und  $V_0^*$  im diskretisierten Modell 0.040647, dies entspricht einer relativen Abweichung von 0.00901. Bereits für eine geringe Anzahl von Handelszeitpunkten unterscheidet sich  $V_0^*$  nicht mehr wesentlich vom fairen Preis der Option bei stetigem Hedging.

Abbildung (1.4) zeigt den Aktienanteil zum Zeitpunkt 1 für  $N = 12$ ,  $K = 99$  und variierendes  $S_0^1$ . Optisch lässt sich kein Unterschied zwischen den Modellen feststellen, der Aktienanteil konvergiert für wachsendes  $S_0^1$  erwartungsgemäß gegen 1.

Die Varianz des Hedgingfehlers  $J_0$  ist gegeben durch

$$J_0 = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \operatorname{Re}[J_0(R + ui, R + vi)] \frac{K^{1-R-ui}}{(R + ui)(R + ui - 1)} \frac{K^{1-R-vi}}{(R + vi)(R + vi - 1)} dudv.$$

Wir berechnen die Varianz für variierendes  $N$  und  $S^1 = 100$ . Abbildung (1.5) zeigt das schnelle Abfallen der Varianz des Hedgingfehlers. Für  $N=10$  ist die Varianz des Hedgingfehlers im diskretisierten BS-Modell bereits kleiner 1, für  $N=12$ , dies entspricht wöchentlichem Handeln bei 3-monatiger Laufzeit, beträgt die Varianz (übereinstimmend mit [12], Seite 882)  $J_0 = 0.83327$ . Für das Normal-Invers-Gauß-Modell erhalten wir für  $N=12$  eine Varianz von 1.044, dies entspricht ebenfalls den Resultaten von [12]. Für das Sprungdiffusionsmodell liegt die Varianz für  $N=12$  mit 0.893 knapp über dem Wert des diskretisierten BS-Modells.

*Bemerkung 1.64.* Für das zeitdiskrete Black-Scholes-Modell und das Normal-Invers-Gauß-Modell gelang uns der Nachweis der numerischen Resultate von [12], Kapitel 5. Eine Anwendung auf das Merton-Sprungdiffusionsmodell ist auf Grund der schnell abfallenden charakteristischen Funktion ohne weiteres möglich, für das Varianz-Gamma-Modell gelang uns dies nicht. Auf Grund numerischer Probleme bei der Integration der momentenerzeugenden Funktion konnten wir keine brauchbaren Resultate für das Startkapital oder die Varianz erzielen.

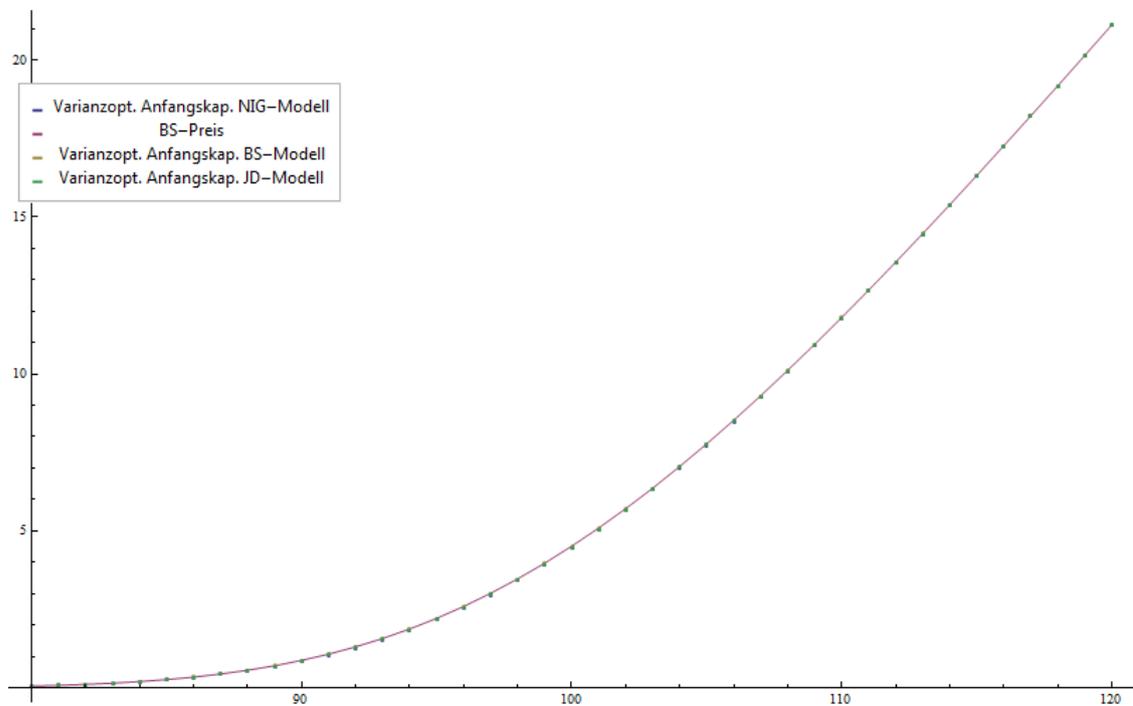


Abbildung 1.1: Optimales Startkapital

$S_0^1$	disk. BS-Modell	NIG-Modell	Sprung-Diff.-Modell
80	0.0530134	0.053792	0.0511757
85	0.254512	0.251099	0.248953
90	0.859828	0.844354	0.848704
95	2.19391	2.16346	2.17831
100	4.48953	4.45232	4.47354
105	7.7525	7.72108	7.74013
110	11.7844	11.7652	11.7771
115	16.3142	16.3057	16.3109
120	21.1133	21.1109	21.1124

Abbildung 1.2: Optimales Startkapital

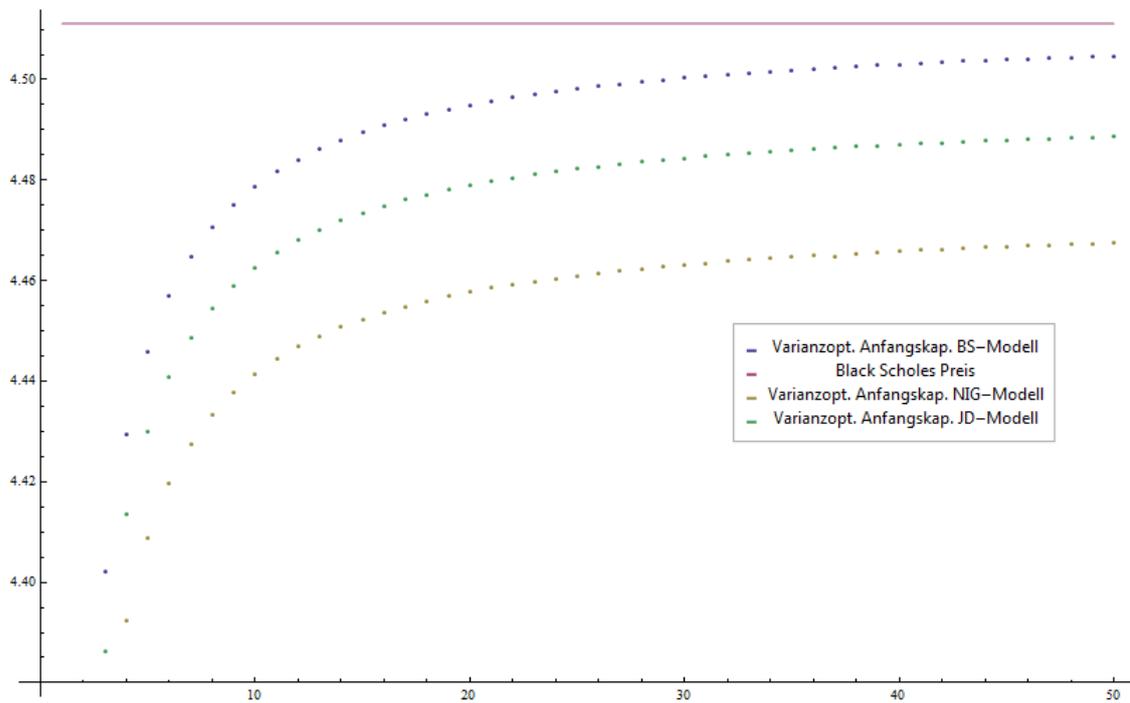


Abbildung 1.3:  $V_0^*$  für variierende Anzahl der Handelszeitpunkte

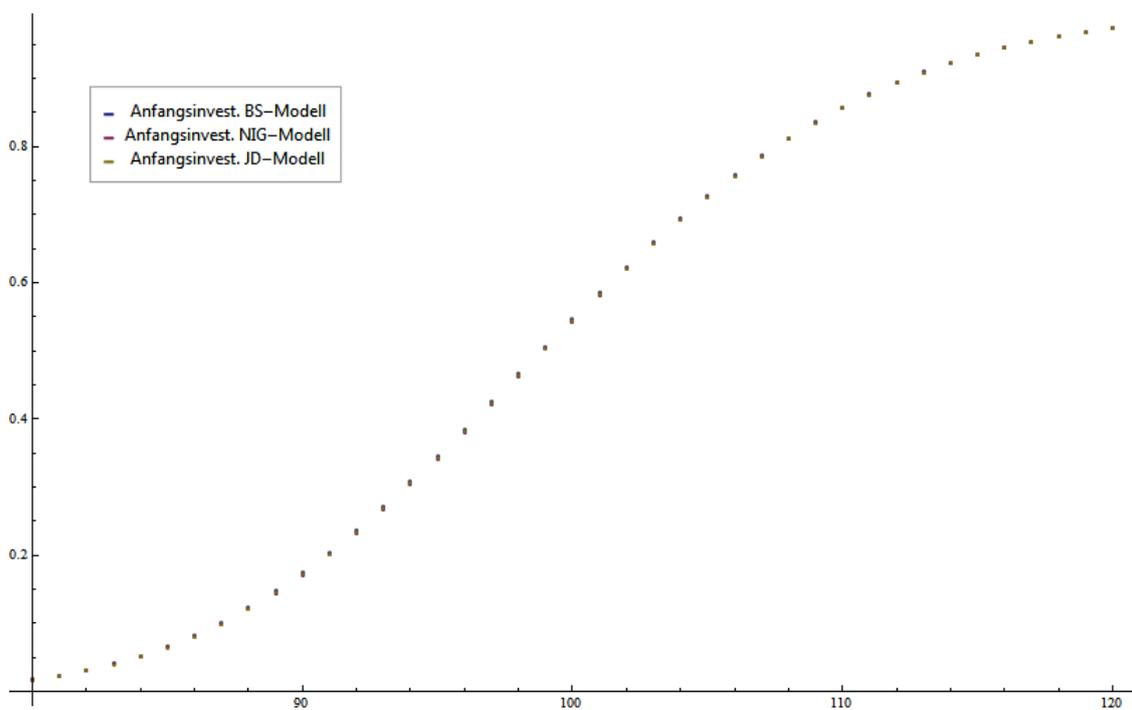


Abbildung 1.4: Aktienanteil zum Zeitpunkt 1

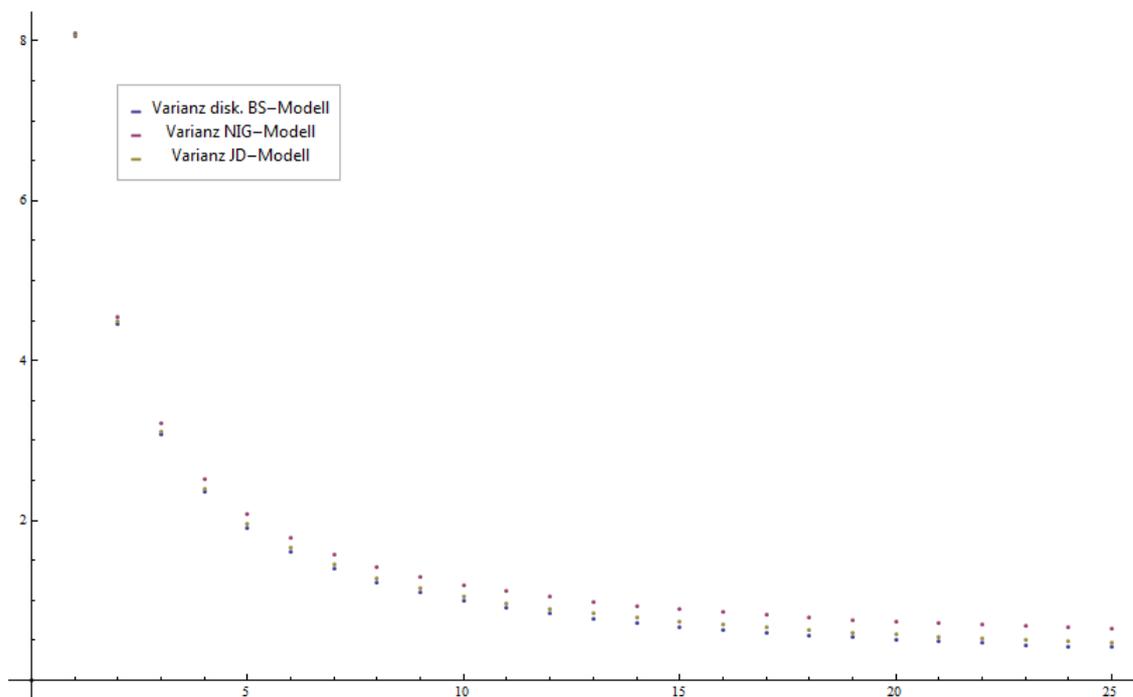


Abbildung 1.5: Varianz des Hedgingfehlers

# Kapitel 2

## Zeitstetige Modelle

### 2.1 Mean-Variance Hedging in zeitstetigen Finanzmarktmodellen

In diesem Kapitel werden wir den Ansatz des mean-variance Hedgings auf zeitstetige Finanzmarktmodelle übertragen. Dabei nehmen wir an, dass das objektive Maß  $P$  ein Martingalmaß ist. Wir folgen dabei den Ausführungen von [8], *Kapitel 10* sowie [9]. In Abschnitt übertragen wir die Zusammenhänge zwischen mean-variance Hedging und lokal risikominimierendem Hedging aus Abschnitt 1.3 auf exponentielle Lévy Modelle. Grundlage dafür sind die Ergebnisse von [12], *Kapitel 3 und 4*. Wir setzen wie zuvor voraus, dass Annahme 1 erfüllt ist.

Wir betrachten ein zeitstetiges Finanzmarktmodell mit Anfangszeitpunkt 0 und Zeithorizont  $[0, T]$ ,  $T \in \mathbb{R}^+$ . Dem Modell liegt ein Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  und eine den Informationsverlauf beschreibende Filtration  $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$  zugrunde. Es gilt dabei:

$$\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\},$$

d.h. zum Zeitpunkt 0 ist keine Information über das Zufallsexperiment bekannt. Das Modell beinhaltet zwei Finanzgüter, den "risikolosen" Bond  $S^0 = (S_t^0)_{0 \leq t \leq T}$  mit deterministischem Preisprozess

$$S_t^0 = e^{rt} \quad r \in \mathbb{R}^+$$

und eine risikobehaftete Aktie  $S^1 = (S_t^1)_{0 \leq t \leq T}$ .  $S^1$  ist  $\mathcal{F}_t$ -adaptiert, càdlàg und quadratintegrierbar. Wir bezeichnen mit  $S = (S^0, S^1)$  den Preisprozess sowie mit

$$\tilde{S} = \frac{1}{S^0}(S^0, S^1) = (1, \tilde{S}^1)$$

den diskontierten Preisprozess. Dabei ist  $\tilde{S}^1 = (\tilde{S}_t^1)_{0 \leq t \leq T}$  mit

$$\tilde{S}_t^1 = e^{-rt} S_t^1.$$

*Bemerkung 2.1.* Auf obigem Marktmodell lässt sich varianzoptimales Hedgen für geeignete Handelsstrategien definieren und im Martingalfall auch lösen. Explizite Darstellungen für die Handelsstrategien werden wir für exponentielle Levymodelle bestimmen. Wie zuvor betrachten wir eine zum Endzeitpunkt  $T$  fällige Forderung  $H$ .

**Definition 2.2.** Eine Forderung  $H$  ist eine  $\mathcal{F}_T$ -messbare quadratisch integrierbare Zufallsvariable, d.h.

$$H \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P).$$

**Definition 2.3.** Ein stochastischer Prozess  $\phi = (\phi_t)_{0 \leq t \leq T}$  heißt einfach vorhersagbar, wenn er folgende Darstellung besitzt:

$$\phi_t = Y_0 + \sum_{i=0}^n Y_i I_{(T_i, T_{i+1}]}(t) \quad n \in \mathbb{N},$$

wobei  $Y_i, i \in \{0, \dots, n\}$  beschränkte  $\mathcal{F}_{T_i}$  messbare Zufallsvariablen und  $0 = T_0 < T_1 < \dots < T_{n+1} = T$  adaptierte endliche Stoppzeiten sind. Sei  $\sigma_c$  die von den  $\mathcal{F}_t$ -adaptierten càglàd Prozessen erzeugte Sigmaalgebra

$$\sigma_c = \sigma(X | X \text{ adaptiert, càglàd})$$

Ein stochastischer Prozess  $\phi = (\phi_t)_{0 \leq t \leq T}$  heißt vorhersagbar, wenn er messbar bezüglich  $\sigma_c$  ist.

*Bemerkung 2.4.* Einfach vorhersagbare Prozesse entsprechen den in Abschnitt 1.1 definierten zeitdiskreten vorhersagbaren Prozessen mit einer variablen, endlichen Anzahl an Handelszeitpunkten. Wir wollen die Wertentwicklung der Handelsstrategie als stochastisches Integral bezüglich  $\tilde{S}^1$  darstellen. Für einen vorhersagbaren Prozess  $\phi$  ist dies stets möglich. Ist  $\phi$  zusätzlich càglàd, so lässt sich  $\phi$  durch einfach vorhersagbare Prozesse approximieren, was die praktische Anwendung ermöglicht.

**Definition 2.5.** Eine Handelsstrategie  $\phi$  ist ein Paar von stochastischen Prozessen  $\phi = ((\phi_t^0, \phi_t^1))_{0 \leq t \leq T}$  für die gilt:

- $\phi^0$  ist vorhersagbar.
- $\phi^1$  ist vorhersagbar.

Wir definieren analog zu Abschnitt 1.1 den Wertprozess und den Wertentwicklungsprozess.

**Definition 2.6.** Der Wertprozess  $V(\phi)$  einer Handelsstrategie  $\phi = (\phi^0, \phi^1)$  ist definiert als:

$$V_t(\phi) := \langle \phi_t, S_t \rangle = \phi_t^0 S_t^0 + \phi_t^1 S_t^1 \quad t \in [0, T].$$

$V_0(\phi)$  stellt das Startkapital der Handelsstrategie dar, der Endwert ist über  $V_T(\phi)$  gegeben. Der diskontierte Wertprozess hat die Form

$$\tilde{V}_t(\phi) = (S_t^0)^{-1} V_t(\phi) = \phi_t^0 + \phi_t^1 \tilde{S}_t^1 \quad t \in [0, T].$$

**Definition 2.7.** Der Wertentwicklungsprozess  $G(\phi)$  einer Handelsstrategie  $\phi = (\phi^0, \phi^1)$  ist definiert als:

$$G_t(\phi) := (\phi \cdot S)_t = \int_0^t \phi_u dS_u \quad t \in [0, T]$$

sofern das stochastische Integral existiert. Der diskontierte Wertentwicklungsprozess hat die Form:

$$\tilde{G}_t(\phi) := (\phi \cdot \tilde{S})_t = \int_0^t \phi_u d\tilde{S}_u \quad t \in [0, T]$$

**Definition 2.8.** Eine Handelsstrategie  $\phi = (\phi^0, \phi^1)$  heißt selbstfinanzierend, wenn

$$V_t(\phi) = \int_0^t \phi_u dS_u$$

Da wir uns auf selbstfinanzierende Handelsstrategien beschränken, können wir die Handelsstrategien wie in Abschnitt 1.2 über ein Startkapital  $V_0$  und den Anteil in der Aktie  $\phi^1$  charakterisieren.

**Definition 2.9.** Sei  $\Phi$  der Raum der zulässigen Prozesse

$$\Phi := \{ \phi \text{ vorhersagbar und } E[|\int_0^T \phi_t d\tilde{S}_t^1|^2] < \infty \}.$$

Das Paar  $(V_0^*, \phi^*)$  mit  $V_0^* \in \mathbb{R}^+$  und  $\phi^* \in \Phi$  heißt varianzoptimale Handelsstrategie (oder mean-variance Handelsstrategie), wenn  $(V_0^*, \phi^*)$  eine Lösung des Optimierungsproblems

$$\inf_{V_0 \in \mathbb{R}, \phi \in \Phi} E[|\tilde{H} - V_0 - \int_0^T \phi_t d\tilde{S}_t^1|^2] \quad (2.1)$$

ist.

*Bemerkung 2.10.* Sei

$$\mathcal{G} := \{ \phi \in \Phi \mid \int_0^T \phi_t d\tilde{S}_t^1 \} \quad (2.2)$$

der Raum der zulässigen stochastischen Integrale bezüglich  $S^1$ , dann ist die Lösung von (2.1) die Orthogonalprojektion von  $\tilde{H} - V_0$  auf  $\mathcal{G}$ . Ist  $P$  ein Martingalmaß, so lässt sich im zeitdiskreten Fall die Orthogonalprojektion über die Kunita-Watanabe Zerlegung darstellen. Gleiches Vorgehen ist auch hier möglich, wir verwenden dazu eine Formulierung der Kunita-Watanabe Zerlegung aus ([8], Seite 337).

**Satz 2.11.** Galtchouk-Kunita-Watanabe Zerlegung:

Sei  $\tilde{S}^1$  ein quadratintegrierbares  $P$ -Martingal. Dann besitzt  $\tilde{H}$  die Darstellung

$$\tilde{H} = E[\tilde{H}] + \int_0^T \phi_t^H d\tilde{S}_t^1 + N_T^H \quad P\text{-f.s.}, \quad (2.3)$$

wobei  $\phi^H = (\phi_t^H)_{0 \leq t \leq T}$  ein quadratintegrierbarer vorhersagbarer Prozess und  $N^H = (N_t^H)_{0 \leq t \leq T}$  ein  $P$ -Martingal ist.

$N^H$  erfüllt folgende Eigenschaften:  $\forall \phi \in \Phi$

$$E[N_T^H \int_0^T \phi_t d\tilde{S}_t^1] = 0 \quad P\text{-f.s.}$$

Sei weiters  $\xi = (\xi_t)_{0 \leq t \leq T}$  ein quadratintegrierbarer, vorhersagbarer Prozess. Dann ist  $Y = (Y_t)_{0 \leq t \leq T}$  mit

$$Y_t := N_t \int_0^t \xi_u d\tilde{S}_u^1$$

ein  $P$ -Martinal.

*Bemerkung 2.12.* Wie im zeitdiskreten Fall lässt sich die Forderung  $\tilde{H}$  in ein stochastisches Integral sowie ein Martingal  $N^H$  zerlegen. Die varianzoptimale Handelsstrategie ist über

$$\begin{aligned} V_0^* &= E[\tilde{H}] \\ \phi_t^* &= \phi_t^H \end{aligned}$$

gegeben,  $\phi^*$  ist im Allgemeinen aber nicht  $c\grave{a}g\grave{l}\grave{a}d$ , was die praktische Anwendung einschränkt. Das Integral

$$\int_0^T \phi_t^H d\tilde{S}_t^1$$

ist die Orthogonalprojektion von  $\tilde{H}$  auf den Raum  $\mathcal{G}$ . Der Prozess  $N^H$  ist stark orthogonal zu  $\mathcal{G}$  und lässt sich als nicht hedgbares Risiko interpretieren. Wir werden uns in weiterer Folge auf exponentielle Lévy Modelle beschränken und eine explizite Darstellung für  $\phi^*$  bestimmen. Desweiteren sehen wir in Satz 2.19, dass die varianzoptimale Handelsstrategie durch einen  $c\grave{a}g\grave{l}\grave{a}d$ -Prozess gegeben ist, damit ist eine Approximation durch einfach vorhersagbare Prozesse möglich.

## 2.2 Exponentielle Lévy Modelle - Martingalfall

Wir beziehen uns in diesem Abschnitt auf [8] und [9].

**Definition 2.13.** *Exponentielles Lévy Modell 1: Sei  $X = (X_t)_{0 \leq t \leq T}$  ein Lévy Prozess mit charakteristischem Tripel  $(\mu, \sigma^2, \nu)$  wobei  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma^2 \in \mathbb{R}^+$  und  $\nu$  das zugehörige Lévy Maß ist. Für  $X$  gelte:*

$$\int_{|x| \geq 1} e^{2x} \nu(dx) < \infty$$

sowie

$$\frac{1}{2}\sigma^2 + \mu + \int_{\mathbb{R}} (e^x - xI_{|x| \leq 1}(x) - 1)\nu(dx) = 0.$$

Der Preisprozess des risikolosen Bonds  $S^0 = (S_t^0)_{0 \leq t \leq T}$  ist definiert als

$$S_t^0 := e^{rt} \quad \forall t \in [0, T].$$

Der Preisprozess der Aktie  $S^1 = (S_t^1)_{0 \leq t \leq T}$  ist ein exponentieller Lévy Prozess gegeben durch

$$S_t^1 = \exp[rt + X_t] \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.4)$$

Die den Informationsverlauf beschreibende  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{F}$  sei gegeben durch

$$\mathcal{F}_t = \sigma(\{S_s^1 | s \leq t\} \cup \mathcal{N}).$$

Der diskontierte Preisprozess  $\tilde{S}^1$  ist ein quadratintegrierbares  $P$ -Martingal.

*Beweis.* Per Konstruktion hat  $\tilde{S}^1$  die Form

$$\tilde{S}_t^1 = e^{X_t} \quad \forall t \in [0, T].$$

Die Aussage folgt aus Lemma 3.13 und Lemma 3.14. □

*Bemerkung 2.14.* Das Black Scholes Modell als vollständiges Finanzmarktmodell stellt einen Spezialfall in der Klasse der exponentiellen Lévy Modelle dar. Wie wir in Bemerkung 2.22 sehen, bleibt bei Sprungprozessen im Allgemeinen ein nicht hedgbares Risiko bestehen. Ausnahme ist hier der Fall  $X_t = cN_t - (e^c - 1)t$  mit  $c \in \mathbb{R}$  und einem Poisson Prozess  $N = (N_t)_{0 \leq t \leq T}$ . Als Finanzmarktmodell kommt diese Wahl nicht in Frage.

Zur Bestimmung von  $\phi^*$  verwenden wir die Zusammenhänge zwischen dem exponentiellen Lévyprozess  $\tilde{S}^1$  und der Darstellung von  $S^1$  als Exponentialprozess.

**Satz 2.15.** *Exponentialprozess (Doleans-Dade Exponential):*

Sei  $X = (X_t)_{0 \leq t \leq T}$  ein Lévy Prozess mit charakteristischem Tripel  $(\mu, \sigma^2, \nu)$ . Dann existiert ein eindeutiger càdlàg Prozess  $Z = (Z_t)_{0 \leq t \leq T}$  sodass

$$dZ_t = Z_{t-} dX_t \quad Z_0 = 1 \quad (2.5)$$

gilt.  $Z$  hat die Darstellung

$$Z_t = e^{X_t - \frac{\sigma^2 t}{2}} \prod_{0 \leq s \leq t} (1 + \Delta X_s) e^{-\Delta X_s}, \quad (2.6)$$

wobei  $\Delta X_s$  den Sprung von  $X$  zum Zeitpunkt  $s$  darstellt. Gilt

$$\int_{-1}^1 |x| \nu(dx) < \infty,$$

dann haben die Sprünge von  $X$  endliche Variation und  $Z$  hat die Darstellung

$$Z_t = e^{\sigma W_t + \mu_0 t - \frac{\sigma^2 t}{2}} \prod_{0 \leq s \leq t} (1 + \Delta X_s) \quad (2.7)$$

wobei

$$\mu_0 = \mu - \int_{-1}^1 x \nu(dx)$$

und  $W$  eine Standard Brownsche Bewegung ist.

*Beweis.* Wir definieren

$$V_t := \prod_{\substack{0 \leq s \leq t \\ \Delta X_s \neq 0}} (1 + \Delta X_s) e^{-\Delta X_s},$$

und zeigen, dass  $V_t$  existiert und endliche Variation besitzt. Wir zerlegen  $V_t$  dazu in

$$V_t = V'_t V''_t$$

wobei

$$V'_t = \prod_{\substack{0 \leq s \leq t \\ |\Delta X_s| \leq 1/2}} (1 + \Delta X_s) e^{-\Delta X_s}$$

die Sprünge kleinergleich  $1/2$  und

$$V''_t = \prod_{\substack{0 \leq s \leq t \\ |\Delta X_s| > 1/2}} (1 + \Delta X_s) e^{-\Delta X_s}$$

die großen Sprünge enthält. Die Anzahl der Sprünge  $\Delta X_s > \epsilon$  für  $\epsilon > 0$ , fix, ist endlich.  $V''$  ist also ein endliches Produkt und hat dadurch endliche Variation, im Speziellen ist  $V''$  wohldefiniert. Wir betrachten

$$\ln[V'_t] = \sum_{\substack{0 \leq s \leq t \\ |\Delta X_s| < 1/2}} (\ln[1 + \Delta X_s] - \Delta X_s)$$

Für die Summanden gilt

$$-\Delta X_s^2 < (\ln[1 + \Delta X_s] - \Delta X_s) < 0 \quad P\text{-f.s. } \forall s,$$

der Prozess  $Y = (Y_t)_{0 \leq t \leq T}$

$$Y_t := - \sum_{0 \leq s \leq t} \Delta X_s^2$$

ist also eine untere Schranke für  $\ln[V_t]$ .  $Y$  ist die unstetige quadratische Variation von  $X$  und ein Subordinator, im Speziellen ist  $Y_t$  endlich  $\forall t$ .  $\ln[V']$  ist monoton fallend in  $t$  und durch  $Y$  beschränkt. Damit sind  $\ln[V']$ ,  $V'$  und  $V$  wohldefiniert und  $V$  ist von endlicher Variation. Die Gleichung (2.5) folgt aus der Itô-Formel für Sprungprozesse gegeben durch Satz 3.19. Wir setzen

$$Z_t = f(t, X_t, V_t) = e^{X_t - \frac{\sigma^2 t}{2}} V_t$$

Die Itô-Formel liefert

$$\begin{aligned} dZ_t = & -\frac{\sigma^2}{2} e^{X_{t-} - \frac{\sigma^2 t}{2}} V_{t-} dt + e^{X_{t-} - \frac{\sigma^2 t}{2}} V_{t-} dX_t + e^{X_{t-} - \frac{\sigma^2 t}{2}} dV_t + \frac{\sigma^2}{2} e^{X_{t-} - \frac{\sigma^2 t}{2}} dt \\ & + e^{X_t - \frac{\sigma^2 t}{2}} V_t - e^{X_{t-} - \frac{\sigma^2 t}{2}} V_{t-} - \Delta X_t e^{X_{t-} - \frac{\sigma^2 t}{2}} V_{t-} - \Delta V_t e^{X_{t-} - \frac{\sigma^2 t}{2}} \end{aligned}$$

$V$  ist ein reiner Sprungprozess, mit

$$dV_t = \Delta V_t = V_{t-} (e^{\Delta X_t} (1 + \Delta X_t) - 1)$$

folgt

$$\begin{aligned} dZ_t = & e^{X_{t-} - \frac{\sigma^2 t}{2}} V_{t-} dX_t + e^{X_t - \frac{\sigma^2 t}{2}} V_t - e^{X_{t-} - \frac{\sigma^2 t}{2}} V_{t-} (1 + \Delta X_t) \\ = & Z_{t-} dX_t + e^{X_t - \frac{\sigma^2 t}{2}} V_t - e^{X_{t-} - \frac{\sigma^2 t}{2}} V_{t-} (1 + \Delta X_t) e^{-\Delta X_t} e^{\Delta X_t} \\ = & Z_{t-} dX_t + e^{X_t - \frac{\sigma^2 t}{2}} V_t - e^{X_{t-} + \Delta X_t - \frac{\sigma^2 t}{2}} V_{t-} = Z_{t-} dX_t. \end{aligned}$$

Seien  $Z$  und  $\hat{Z}$  Prozesse die (2.5) erfüllen. Wir definieren  $U = (U_t)_{0 \leq t \leq T}$  mit

$$U_t := Z_t - \hat{Z}_t.$$

$U$  erfüllt (2.5) mit  $U_0 = 0$  und damit gilt  $\forall t$

$$U_t = 0 \quad P\text{-f.s.},$$

d.h. der Exponentialprozess  $Z$  ist eindeutig.

Zum Nachweis von (2.7) betrachten wir die Lévy-Itô Zerlegung von  $X$  gemäß Bemerkung 3.11

$$X_t = \mu t + \sigma W_t + \int_{\substack{x \in \mathbb{R} \\ s \in [0, t]}} x J_X(ds \times dx) - \int_{|x| \leq 1} x \nu(dx).$$

$W = (W_t)_{0 \leq t \leq T}$  ist eine Brownsche Bewegung,  $J_X$  bezeichnet das Sprungmaß von  $X$  gemäß Definition 3.8. Zur Verkürzung der Notation definieren wir

$$P_t = \prod_{0 \leq s \leq t} (1 + \Delta X_s).$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
Z_t &= \exp\left[X_t - \frac{\sigma^2 t}{2} - \sum_{0 \leq s \leq t} \Delta X_s\right] P_t \\
&= \exp\left[\mu t - \frac{\sigma^2 t}{2} + \sigma W_t + \int_{\substack{x \in \mathbb{R} \\ s \in [0, t]}} x J_X(ds \times dx) - \int_{|x| \leq 1} x \nu(dx) - \sum_{0 \leq s \leq t} \Delta X_s\right] P_t \\
&= \exp\left[t\left(\mu - \int_{|x| \leq 1} x \nu(dx)\right) + \sigma W_t - \frac{\sigma^2 t}{2}\right] P_t.
\end{aligned}$$

□

**Satz 2.16.** 1. Sei  $X = (X_t)_{0 \leq t \leq T}$  ein Lévy Prozess mit charakteristischem Tripel  $(\mu, \sigma^2, \nu)$  und  $Z = (Z_t)_{0 \leq t \leq T}$  der zugehörige Exponentialprozess

$$dZ_t = Z_{t-} dX_t.$$

Gilt für alle  $0 \leq t \leq T$

$$Z_t > 0 \quad P\text{-f.s.},$$

dann existiert ein anderer Lévy Prozess  $L = (L_t)_{0 \leq t \leq T}$  mit char. Tripel  $(\mu_L, \sigma_L^2, \nu_L)$  sodass

$$Z_t = e^{L_t} \tag{2.8}$$

und

$$L_t = X_t - \frac{\sigma^2 t}{2} + \sum_{0 \leq s \leq t} (\ln[1 + \Delta X_s] - \Delta X_s). \tag{2.9}$$

Es gelten die Identitäten

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \sigma_L^2 \\
\nu_L(A) &= \nu(\{x | (1+x) \in A\}) = \int I_{\{A\}}(\ln[1+x]) \nu(dx) \\
\mu_L &= \mu - \frac{\sigma^2}{2} + \int (\ln[1+x] I_{[-1,1]}(\ln[1+x]) - x I_{[-1,1]}(x)) \nu(dx).
\end{aligned}$$

2. Sei umgekehrt  $L = (L_t)_{0 \leq t \leq T}$  ein Lévy Prozess mit char. Tripel  $(\mu_L, \sigma_L^2, \nu_L)$  und  $Z = (Z_t)_{0 \leq t \leq T}$  definiert durch

$$Z_t := e^{L_t}.$$

Dann existiert ein Lévy Prozess  $X = (X_t)_{0 \leq t \leq T}$  mit char. Tripel  $(\mu, \sigma^2, \nu)$  sodass  $Z$  der Exponentialprozess zu  $X$  ist, d.h.

$$dZ_t = Z_{t-} dX_t$$

$X$  besitzt die Darstellung

$$X_t = L_t + \frac{\sigma^2 t}{2} + \sum_{0 \leq s \leq t} (e^{\Delta L_s} - 1 - \Delta L_s) \quad (2.10)$$

und es gelten die Identitäten

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \sigma_L^2 \\ \nu(A) &= \nu_L(\{x | e^x - 1 \in A\}) = \int I_A(e^x - 1) \nu_L(dx) \\ \mu &= \mu_L + \frac{\sigma_L^2}{2} + \int (e^x - 1) I_{[-1,1]}(e^x - 1) - x I_{[-1,1]}(x) \nu_L(dx). \end{aligned}$$

*Beweis.* 1. Die Voraussetzung  $Z > 0$  ist äquivalent zu

$$\Delta X_s > -1 \quad \forall s, \quad (2.11)$$

$\ln[1 + \Delta X_s]$  ist damit wohldefiniert. Aus Satz 2.5 folgt, dass die Summe

$$\sum_{0 \leq s \leq t} (\ln[1 + \Delta X_s] - \Delta X_s)$$

wohldefiniert ist. Damit ist  $L$  ein Lévy Prozess und es gilt  $\sigma_L^2 = \sigma^2$ . Bezeichne  $J_X$  das Sprungmaß des Prozesses  $X$ . Da

$$\Delta L_s = \ln[1 + \Delta X_s] \quad \forall s,$$

ist das Sprungmaß von  $L$  gegeben durch

$$J_L([0, t] \times A) = \int_{[0, t] \times \mathbb{R}} I_A(\ln[1 + x]) J_X(ds \times dx).$$

Daraus folgt die Darstellung für  $\nu_L$ . Durch Einsetzen der Lévy-Itô Zerlegung von  $L$  und  $X$  gemäß Satz 3.10 in (2.9) erhalten wir die Darstellung von  $\mu_L$ . Bezeichne  $J_L^c$  und  $J_X^c$  die kompensierten Sprungmaße von  $L$  und  $X$ . Es gilt

$$\begin{aligned} 0 &= L_t - X_t - \sum_{0 \leq s \leq t} (\ln[1 + \Delta X_s] - \Delta X_s) + \frac{\sigma^2 t}{2} \\ &= \mu_L t + B_t(\sigma_L - \sigma) + \int_{s \in [0, t], |x| > 1} x J_L(ds \times dx) + \int_{s \in [0, s], |x| \leq 1} x J_L^c(ds \times dx) \\ &\quad - \mu t + \frac{\sigma^2 t}{2} - \int_{s \in [0, t], |x| > 1} x J_X(ds \times dx) - \int_{s \in [0, t], |x| \leq 1} x J_X^c(ds \times dx) \\ &\quad - \sum_{0 \leq s \leq t} (\ln[1 + \Delta X_s] - \Delta X_s) \end{aligned}$$

Da

$$\begin{aligned} &\int_{s \in [0, t], |x| > 1} x (J_L - J_X)(ds \times dx) \\ &= \sum_{0 \leq s \leq t} (\Delta X_s I_{[-1,1]}(\Delta X_s) - \ln[1 + \Delta X_s] I_{[-1,1]}(\ln[1 + \Delta X_s])) \end{aligned}$$

existiert, ist  $L - X$  wohldefiniert und sowohl der Driftanteil als auch der Sprunganteil müssen  $P$ -f.s. verschwinden. Es folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \mu_L - \mu + \frac{\sigma^2}{2} - \int_{[-1,1]} x(\nu_L - \nu)(dx) \\ &= \mu_L - \mu + \frac{\sigma^2}{2} - \int (\ln[1+x]I_{[-1,1]}(\ln[1+x]) - xI_{[-1,1]}(x))\nu(dx) \end{aligned}$$

2. Definieren wir  $X$  über (2.10), so hat  $Z$  die Darstellung (2.6) und es gilt  $\sigma_L^2 = \sigma^2$ . Aus (2.5) folgt

$$\Delta Z_t = Z_{t-}e^{\Delta L_t} - 1 = Z_{t-}\Delta X_t,$$

umformen liefert die Darstellung für  $\nu$ . Die Lévy-Itô Zerlegung liefert wie zuvor  $\mu$ .  $\square$

*Bemerkung 2.17.* Satz 2.16 besagt, dass der Exponentialprozess eines Lévy Prozesses ein exponentielles Lévy Modell definiert. Für  $\tilde{S}^1$  gelte

$$d\tilde{S}_t^1 = \tilde{S}_{t-}^1 dY_t \quad (2.12)$$

wobei  $Y$  ein Lévy Prozess mit char. Tripel  $(\mu_Y, \sigma_Y^2, \nu_Y)$  und

$$\mu_Y + \int_{|y|>1} y\nu_Y(dy) = 0$$

ist.  $Y$  und  $\tilde{S}^1$  sind nach Lemma 3.15 und Lemma 3.18 Martingale und wir erhalten folgende Darstellung der zulässigen Handelsstrategien über das Lévy Maß von  $Y$ . Sei  $(V_0, \phi^1)$  eine zulässige Handelsstrategie, aus (2.12) folgt

$$E\left[\left|\int_0^T \phi_t^1 d\tilde{S}_t^1\right|^2\right] = E\left[\left|\int_0^T \phi_t^1 \tilde{S}_{t-}^1 dY_t\right|^2\right] < \infty.$$

Sei die Lévy-Itô Zerlegung von  $Y$  gegeben durch

$$Y_t = \mu_Y t + \sigma_Y B_t + \int_{s \in [0,t], |y|>1} y J_Y(ds \times dy) + \int_{s \in [0,t], |y|\leq 1} y J_Y^c(ds \times dy),$$

so folgt aus den Isometrieformeln (3.16) und (3.17) sowie der Martingaleigenschaft

$$\begin{aligned} E\left[\left|\int_0^T \phi_t^1 \tilde{S}_{t-}^1 dY_t\right|^2\right] &= E\left[\left|\int_0^T \phi_t^1 \tilde{S}_{t-}^1 dB_t\right|^2\right] + E\left[\left|\int_0^T \int_{\mathbb{R}} y \phi_t^1 \tilde{S}_{t-}^1 dJ_Y^c(dt \times dy)\right|^2\right] \\ &= E\left[\int_0^T \sigma_Y^2 |\phi_t^1 \tilde{S}_{t-}^1|^2 dt\right] + E\left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}} y^2 |\phi_t^1 \tilde{S}_{t-}^1|^2 dt \nu_Y(dy)\right] < \infty \end{aligned}$$

Gleiches Vorgehen liefert für die Wertentwicklung der Handelsstrategie die Darstellung

$$\tilde{G}(\phi)_T = \int_0^T \sigma_Y^2 \phi_t^1 \tilde{S}_{t-}^1 dB_t + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \phi_t^1 \tilde{S}_{t-}^1 (e^y - 1) J_Y^c(dt \times dy).$$

Folgendes Lemma behandelt die optimale Wahl des Startkapitals  $V_0$

**Lemma 2.18.** Sei  $(V_0^*, \phi^*)$  eine varianzoptimale Handelsstrategie.  $V_0^*$  ist durch

$$V_0^* = E[\tilde{H}] \quad (2.13)$$

gegeben.

*Beweis.* Da  $\tilde{S}^1$  ein P-Martingal ist, gilt

$$E[\tilde{H} - V_0^* - \int_0^T \phi_t^* d\tilde{S}_t^1] = E[\tilde{H}] - V_0^*$$

(2.13) folgt aus

$$\begin{aligned} E[(\tilde{H} - V_0^* - \int_0^T \phi_t^* d\tilde{S}_t^1)^2] &= \text{Var}[\int_0^T \phi_t^* d\tilde{S}_t^1 + V_0^* - \tilde{H}] - E[\tilde{H} - V_0^* - \int_0^T \phi_t^* d\tilde{S}_t^1]^2 \\ &= \text{Var}[\int_0^T \phi_t^* d\tilde{S}_t^1 - \tilde{H}] - (E[\tilde{H}] - V_0^*)^2. \end{aligned}$$

□

**Satz 2.19.** Sei  $\tilde{S}^1$  durch

$$d\tilde{S}_t^1 = \tilde{S}_{t-}^1 dY_t \quad (2.14)$$

gegeben, wobei  $Y$  ein Lévy Prozess und P-Martingal ist mit char. Tripel  $(\mu_Y, \sigma_Y^2, \nu_Y)$  und  $\sigma_Y > 0$ . Sei  $H$  eine europäische  $\mathcal{F}_T$ -messbare Forderung gegeben durch  $H = H_p(S_T^1)$  wobei  $H_p : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  die Auszahlungsfunktion von  $H$  beschreibt. Sei  $H_p$  Lipschitz-stetig, d.h.

$$\exists K > 0 : \quad |H_p(x) - H_p(y)| < K|x - y|,$$

dann hat der Wert der Forderung zum Zeitpunkt  $t$  die Darstellung  $C(t, S_t^1)$ , wobei

$$C(t, S) = e^{-r(T-t)} E[H_p(S_T) | S_t^1 = S]. \quad (2.15)$$

aus  $C^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$  ist. Es existiert eine varianzoptimale zulässige Handelsstrategie  $(V_0^*, \phi^*)$ .  $V_0^*$  ist durch (2.13) gegeben, für  $\phi^*$  gilt

$$\phi_t^* = \delta(t, S_{t-}^1)$$

wobei  $\delta$  durch

$$\delta(t, S) = \frac{\sigma_Y^2 \frac{\partial C}{\partial S} C(t, S) + \frac{1}{S} \int y(C(t, S(1+y)) - C(t, S)) \nu_y(dy)}{\sigma_Y^2 + \int y^2 \nu_Y(dy)} \quad (2.16)$$

gegeben ist.

*Beweis.* Wir definieren die Funktion

$$C(t, S) := e^{-r(T-t)} E[H_p(S_T) | S_t^1 = S],$$

sowie deren diskontierten Wert

$$\tilde{C}(t, S) = e^{-rt} C(t, S) = e^{-rT} E[H_p(S_T) | S_t^1 = S].$$

Nach Konstruktion ist  $\tilde{C}(t, S)$  ein quadratintegrierbares P-Martingal.

$$C(0, S_0^1) = e^{-rT} E[H_p(S_T^1)] = E[\tilde{H}]$$

entspricht der optimalen Wahl von  $V_0^*$  aus Lemma 2.13. Wir wollen die Itô-Formel auf  $\tilde{C}(t, S)$  anwenden, dazu muss  $\tilde{C}$  stetig differenzierbar nach  $t$  und zumindest zwei mal differenzierbar nach  $S$  sein. Wir weisen die Differenzierbarkeit nach  $t$  mit Hilfe der Carr und Madan Methode zur Optionsbepreisung nach, sei dazu o.B.d.A.  $r=0$ .  $\tilde{C}$  ist genau dann nach  $t$  differenzierbar, wenn der Zeitwert der Forderung, d.h.

$$C(t, x) - H_p(x)$$

nach  $t$  differenzierbar ist. Die Fouriertransformierte des Zeitwerts ist gegeben durch

$$\zeta_{T-t}(v) = \frac{\Phi_{T-t}(v-i) - 1}{iv(1+iv)}, \quad (2.17)$$

wobei  $\Phi_{T-t}$  die Fouriertransformierte von  $X_{T-t}$  bezeichnet. Aus Satz 3.12 folgt

$$\frac{\partial \zeta_{T-t}(v)}{\partial(T-t)} = \frac{\psi(v-i)\Phi_{T-t}(v-i)}{iv(iv+1)}.$$

Weil  $e^{X_t}$  ein Martingal ist, gilt

$$\psi(-i) = \psi(-i)' = 0$$

und es folgt für  $\psi(v-i)$

$$\psi(v-i) \sim O(|v^2|).$$

Damit ist  $\frac{\partial \zeta_{T-t}(v)}{\partial(T-t)}$  integrierbar, wenn  $\Phi_{T-t}(v-i)$  integrierbar ist. Auf Grund von  $\sigma_L = \sigma > 0$  sowie der Martingaleigenschaft von  $e^{X_t}$  fällt  $\Phi_{T-t}(v-i)$  schneller gegen 0 als jede Potenz von  $|v|$ . Damit ist  $\Phi_{T-t}(v-i)$  integrierbar, Fourierinversion und dominierte Konvergenz liefern die Differenzierbarkeit von  $\tilde{C}$ .

Per Voraussetzung gilt  $\sigma_Y = \sigma > 0$ , für die Fouriertransformierte  $\Phi_t$  von  $X_t$  folgt

$$|\Phi_t(v)| \leq K_1 \exp[-K_2|v|^\alpha] \quad \forall t > 0$$

mit den positiven Konstanten  $K_1, K_2, \alpha \in \mathbb{R}^+$  (vgl. [9] Seite 9). Damit besitzt  $X_t$  eine glatte Dichtefunktion  $p_t(x) \in \mathcal{C}^\infty[\mathbb{R}]$  für alle  $0 < t \leq T$ . Wir erhalten unter Verwendung der Unabhängigkeit der Zuwächse von  $X$

$$\begin{aligned} C(t, x) &= E[H_p(S_T^1) | S_t^1 = x] = E[H_p(xe^{X_T - X_t}) | S_t^1 = x] \\ &= E[H_p(xe^{X_{T-t}})]. \end{aligned}$$

Wir setzen

$$u(T-t, y) := E[H_p(e^{(-1)(y-T_{T-t})})]$$

mit  $y = -\ln[x]$ . Da

$$u(T-t, y) = \int H_p(e^{(-1)(y-x)}) p_{T-t}(x) dx$$

ist  $u(T-t, \cdot)$  eine glatte Funktion, und wir erhalten die Differenzierbarkeit von  $C(t, x)$ . Sei in weiterer Folge  $r \in \mathbb{R}$ . Anwendung der Itô-Formel nach Satz 3.19 auf  $\tilde{C}(t, S_t^1)$  liefert

$$\begin{aligned} \tilde{C}(t, S_t^1) - \tilde{C}(0, S_0^1) &= \int \frac{\partial \tilde{C}}{\partial S^1}(u, S_{u-}^1) dS_u^1 + \int \left[ \frac{\partial \tilde{C}}{\partial u}(u, S_u^1) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial (S^1)^2}(u, S_u^1) \right] du \\ &\quad + \sum_{\substack{0 \leq u \leq t \\ \Delta S_u^1 \neq 0}} (\tilde{C}(u, S_{u-}^1 + \Delta S_u^1) - \tilde{C}(u, S_{u-}^1) - \Delta S_u^1 \frac{\partial \tilde{C}}{\partial S^1}(u, S_{u-}^1)). \end{aligned}$$

Aus (2.14) und der Tatsache, dass  $Y$  ein Martingal ist, folgt

$$\begin{aligned} &= \int \frac{\partial \tilde{C}}{\partial S^1}(u, S_{u-}^1) \tilde{S}_{u-}^1 dY_u + \int \left[ \frac{\partial \tilde{C}}{\partial u}(u, S_u^1) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial (S^1)^2}(u, S_u^1) \right] du \\ &\quad + \sum_{\substack{0 \leq u \leq t \\ \Delta \tilde{S}_u^1 \neq 0}} e^{rt} (\tilde{C}(u, e^{rt}(\tilde{S}_{u-}^1 + \Delta \tilde{S}_u^1)) - \tilde{C}(u, e^{rt} \tilde{S}_{u-}^1) - (\Delta \tilde{S}_u^1) \frac{\partial \tilde{C}}{\partial S^1}(u, e^{rt} \tilde{S}_{u-}^1)) \\ &= \int \frac{\partial \tilde{C}}{\partial S^1}(u, S_{u-}^1) \tilde{S}_{u-}^1 \sigma_Y dB_u + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} z \frac{\partial \tilde{C}}{\partial S^1}(u, S_{u-}^1) \tilde{S}_{u-}^1 J_Z^c(du \times dz) \\ &\quad + \sum_{\substack{0 \leq u \leq t \\ \Delta \tilde{S}_u^1 \neq 0}} e^{rt} (\tilde{C}(u, e^{rt}(\tilde{S}_{u-}^1 + \Delta \tilde{S}_u^1)) - \tilde{C}(u, e^{rt} \tilde{S}_{u-}^1) - (\Delta \tilde{S}_u^1) \frac{\partial \tilde{C}}{\partial S^1}(u, e^{rt} \tilde{S}_{u-}^1)). \end{aligned}$$

$\tilde{C}(t, S_t^1)$  ist ebenfalls ein Martingal, damit verschwindet die Driftkomponente des obigen Ausdrucks. Wir erhalten unter Verwendung von  $\Delta \tilde{S}_u^1 = \tilde{S}_{u-}^1 \Delta Y_u$

$$\begin{aligned} &\tilde{C}(t, S_t^1) - \tilde{C}(0, S_0^1) \\ &= \int \frac{\partial \tilde{C}}{\partial S^1}(u, S_{u-}^1) \tilde{S}_{u-}^1 \sigma_Y dB_u + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} C(u, S_{u-}^1(1+y)) - C(u, S_{u-}^1) J_Y^c(du \times dy) \end{aligned}$$

Über den Zusammenhang aus Satz 2.16 erhalten wir

$$\begin{aligned} & \tilde{C}(t, S_t^1) - \tilde{C}(0, S_0^1) \\ &= \int \frac{\partial C}{\partial S^1}(u, S_{u-}^1) \tilde{S}_{u-}^1 \sigma dB_u + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} C(u, S_{u-}^1(e^x - 1)) - C(u, S_{u-}^1) J_X^c(du \times dx). \end{aligned}$$

Auf Grund der Lipschitz-Stetigkeit von  $H_p$  gilt

$$\begin{aligned} C(t, x) - C(t, y) &= e^{-r(T-t)} (E[H_p(e^{rT+X_T}) | S_t^1 = x] - E[H_p(e^{rT+X_T}) | S_t^1 = y]) \\ &= e^{-r(T-t)} E[H_p(xe^{r(T-t)+X_{T-t}}) - H_p(ye^{r(T-t)+X_{T-t}})] \\ &\leq K|x - y| E[e^{X_{T-t}}] = K|x - y|, \end{aligned}$$

d.h.  $C$  ist lipschitzstetig in der zweiten Komponente. Zur Verkürzung der Notation definieren wir

$$\vartheta(t, y) = (C(t, S_{t-}^1(1 + y)) - C(t, S_{t-}^1)),$$

$\vartheta$  ist dabei eine vorhersagbare Zufallsfunktion. Es folgt für  $\vartheta$

$$E\left[\int_{[0, T] \times \mathbb{R}} |\vartheta(t, y)|^2 dt \nu_Y(dz)\right] \leq E\left[\int_{[0, T] \times \mathbb{R}} K^2 y^2 (S_t^1)^2 dt \nu(dy)\right] < \infty$$

Nach Lemma 3.17 ist das Integral

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \vartheta(u, e^x - 1) J_X^c(du \times dx)$$

ein quadratintegrierbares Martingal. Für den Wertprozess der Handelsstrategie gilt

$$\begin{aligned} \tilde{V}(\phi)_T &= \int_0^T \phi_t^* d\tilde{S}_t^1 = \int_0^T \phi_t^* \tilde{S}_{t-}^1 dZ_t \\ &= \int_0^T \phi_t^* \tilde{S}_{t-}^1 \sigma_Y dB_t + \int_{[0, T] \times \mathbb{R}} y \phi_t^* \tilde{S}_{t-}^1 J_Y^c(dt \times dy). \end{aligned}$$

Der Hedgingfehler von (2.1) ist über die Differenz  $\tilde{C}(T, S_T^1) - \tilde{C}(0, S_0^1) - \tilde{V}_T$  gegeben, wir erhalten

$$\begin{aligned} & e^{-rT} H_p(S_T^1) - V_0^* - \int_0^T \phi_t^* d\tilde{S}_t^1 \\ &= \int_0^T \left( \frac{\partial C}{\partial S}(t, S_{t-}^1) \tilde{S}_{t-}^1 - \phi_t^* \tilde{S}_{t-}^1 \right) \sigma_Y dB_t + \int_{[0, T] \times \mathbb{R}} (\vartheta(t, y) - \phi_t^* \tilde{S}_{t-}^1 y) J_Y^c(dt \times dy). \end{aligned}$$

Die stochastischen Integrale sind wohldefiniert und haben endliche Variation. Der Erwartungswert des Hedgingfehlers verschwindet bei optimaler Wahl von  $V_0^*$ . Aus den Isometrieformeln (3.16) und (3.17) folgt

$$\begin{aligned} & E\left[|e^{-rT} H_p(S_T^1) - V_0^* - \int_0^T \phi_t^* d\tilde{S}_t^1|^2\right] \\ &= E\left[\int_0^T (\tilde{S}_{t-}^1)^2 (\phi_t^* - \frac{\partial C}{\partial S}(t, S_{t-}^1))^2 \sigma_Y^2 dt\right] + E\left[\int_{[0, T] \times \mathbb{R}} |\vartheta(t, y) - \tilde{S}_{t-}^1 \phi_t^* y|^2 dt \nu(dy)\right] \end{aligned}$$

Die Integranden sind positive Prozesse und quadratische Funktionen in  $\phi^*$ , das optimale  $\phi^*$  minimiert die Integranden. Differenzieren liefert

$$(\tilde{S}_{t-}^1)^2 \sigma_Y^2 (\phi_t^* - \frac{\partial C}{\partial S}(t, S_{t-}^1)) + \int_{\mathbb{R}} (\tilde{S}_{t-}^1 \phi_t^* y - \vartheta(t, y)) y \tilde{S}_{t-}^1 \nu(dy) = 0$$

als notwendige Bedingung und damit (2.16). □

*Bemerkung 2.20.* Die Lipschitz-Bedingung ist für Call oder Put-Optionen klarerweise erfüllt, für endliche Kombinationen von Call/Put-Optionen existiert stets eine zulässige varianzoptimale Handelsstrategie. Für europäische Forderungen mit konvexer Auszahlungsfunktion gilt folgende Darstellung: sei  $H_p$  eine konvexe Auszahlungsfunktion, dann gilt

$$H_p(S) = H_p(0) + \frac{dH_p}{dS-}(0)S + \int_0^\infty (S - K)_+ \rho(dK),$$

wobei  $\frac{dH_p}{dS-}$  die linksseitige Ableitung von  $H_p$  bezeichnet.  $\rho$  ist das durch die zweite distributionelle Ableitung von  $H_p$  definierte positive Radon Maß. Die Forderung lässt sich durch (unendlich viele) Call-Optionen mit variablen Strikes darstellen, die Verwendung der Resultate zur Approximation wäre denkbar. Weiters lässt sich Satz 2.19 unter stärkeren Regularitätsbedingungen an  $X$  (oder  $Y$ ) auf eine allgemeinere Klasse von Forderungen erweitern: Wächst die Auszahlungsfunktion  $H_p$  polynomial in  $\ln[\tilde{S}^1]$ , so erhalten wir eine ähnliche Darstellung für  $C$ . Wir geben in der nachfolgenden Bemerkung einen diesbezüglichen Satz an (vgl. [9], *Proposition 2*). Der Beweis entspricht dem Beweis von Satz 2.19, anstelle der Lipschitz-Stetigkeit schätzen wir hier  $C$  mit einem Polynom ab. Die Regularitätsvoraussetzungen sind für Lévyprozess mit Diffusionskomponente oder bestimmte Klassen von stabilen Prozessen erfüllt.

*Bemerkung 2.21.* Sei  $H_p(\ln[\tilde{S}_T^1]) = H_p(X_T)$  die Auszahlungsfunktion einer europäischen Forderung  $H$  mit maximal polynomialem Wachstum, d.h.

$$\exists p \geq 0 \quad |H_p(x)| \leq K(1 + |x|^p).$$

Für das charakteristische Tripel von  $X$  gelte

- $\sigma_X > 0$       oder       $\exists \beta \in ]0, 2[ \quad \liminf_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{\epsilon^{2-\beta}} \int_{-\epsilon}^\epsilon |x|^2 \nu_X(dx) > 0$
- $\int_{|x|>1} |x|^{p+1} \nu(dx) < \infty$ .

Dann gilt

- Die Funktion  $C(t, x) = E[H_p(x + X_{T-t})] = E[H_p(\ln[e^x \tilde{S}_{T-t}^1])]$  ist auf  $[0, T) \times \mathbb{R}$  unendlich oft differenzierbar und für die partiellen Ableitungen gilt

$$\left| \frac{\partial^{m+n} C}{\partial t^m \partial x^n}(c) \right| \leq K(1 + |x|^p) \quad \forall n, m \geq 0.$$

- Ist zusätzlich die Menge der Untstetigkeitsstellen von  $H_p$  eine Lebesguenullmenge und für  $X$  gilt

$$\int_{|x|>1} |x|^{2p} \nu_X(dx) < \infty$$

dann ist der Prozess  $C = (C(t, X_t + x))_{0 \leq t \leq T}$  ein quadratintegrierbares P-Martingal mit der Darstellung

$$\begin{aligned} C(t, x + X_t) &= C(0, x) + \int_0^t \frac{\partial C(s, X_s + x)}{\partial x} \sigma_X dB_s \\ &\quad + \int_{[0,t] \times \mathbb{R}} (C(s, X_s + x + z) - C(s, X_s + x)) J_X^c(ds \times dz). \end{aligned}$$

*Bemerkung 2.22.* Der Beweis von Satz 2.19 liefert eine Darstellung für die Varianz des Hedgingfehlers

$$E\left[\int_0^T (\tilde{S}_{t-}^1)^2 (\phi_t^* - \frac{\partial C}{\partial S}(t, S_{t-}^1))^2 \sigma_Y^2 dt\right] + E\left[\int_{[0,T] \times \mathbb{R}} |\vartheta(t, y) - \tilde{S}_{t-}^1 \phi^* y|^2 dt \nu(dy)\right].$$

Wir untersuchen die Fälle, wenn die Varianz des Hedgingfehlers verschwindet d.h. ein perfekter Hedge möglich ist. Setzen wir dazu das Lévymaß  $\nu_X = 0$ , so erhalten wir das Black-Scholes-Modell und die Varianz des Hedgingfehlers vereinfacht sich zu

$$E\left[\int_0^T (\tilde{S}_{t-}^1)^2 (\phi_t^* - \frac{\partial C}{\partial S}(t, S_{t-}^1))^2 \sigma_Y^2 dt\right].$$

Bei Wahl des Delta-Hegings

$$\phi_t^* = \frac{\partial C}{\partial S}(t, S_t^1),$$

verschwindet die Varianz und wir erhalten die bekannte Vollständigkeit des Black-Scholes-Modells. Setzen wir  $\sigma_X = 0$  und das Lévymaß  $\nu_X$  derart, dass es nur eine fixe Sprunghöhe  $a \in \mathbb{R}$  gibt, so erhalten wir für  $X$

$$X_t = aN_t - (e^a - 1)t,$$

wobei  $N$  ein Poissonprozess ist. Die Varianz des Hedgingfehlers hat die Form

$$E\left[\int_{[0,T] \times \mathbb{R}} |\vartheta(t, a) - \tilde{S}_{t-}^1 \phi^* a|^2 dt\right],$$

und verschwindet für

$$\phi_t^* = \frac{\vartheta(t, a)}{\tilde{S}_{t-}^1 a}.$$

Dieses Vorgehen lässt sich im Allgemeinen nicht auf zusammengesetzte Poissonprozesse erweitern, seien  $a, b \in \mathbb{R}, a \neq b$  zwei verschiedene Sprunghöhen, so ist ein perfekter Hedge genau dann möglich, wenn

$$\phi_t^* = \frac{\vartheta(t, a)}{\tilde{S}_{t-}^1 a} = \frac{\vartheta(t, b)}{\tilde{S}_{t-}^1 b},$$

dies ist allerdings nur dann möglich, wenn  $C$  affin linear in  $S^1$  ist. Besitzt  $X$  sowohl eine Diffusions- als auch eine Sprungkomponente, so muss  $\phi^*$

$$\phi_t^* = \frac{\vartheta(t, y)}{\tilde{S}_{t-}^1 - y} = \frac{\partial C}{\partial S}(t, S_{t-}^1) \quad \nu(dy)\text{-f.s.}$$

erfüllen, im Speziellen muss für  $C$

$$\frac{C(t, S(1+y)) - C(t, S)}{Sy} = \frac{\partial C}{\partial S}(t, S) \quad \nu\text{-f.s.} \quad \forall S$$

gelten. Ist  $C$  konvex, so ist diese Bedingung im Allgemeinen nicht erfüllt. Für Basisprodukte wie Call- und Putoptionen ist ein perfekter Hedge nur im Black-Scholes-Modell sowie in einem exponentiellen Poissonmodell möglich, bei anderer Wahl von  $X$  ist das Finanzmarktmodell unvollständig und der Hedgingfehler größer 0.

*Bemerkung 2.23.* Für die praktische Verwendung von Satz 2.19 ist die Berechnung von  $C$  notwendig. Im Black-Scholes-Modell lässt sich  $C$  als Lösung einer parabolischen partiellen Differenzialgleichung darstellen. Ähnliches Vorgehen ist unter bestimmten Regularisierungsbedingungen auch hier möglich, wir geben die korrespondierend partielle Integrodifferenzialgleichung im folgenden Satz ohne Beweis an. Zur numerischen Lösung der Differentialgleichung eignen sich Finite-Differenzen-Methoden, das auftretende Integral wird dabei durch eine Riemannsumme ersetzt. Desweiteren definiert man Randbedingungen für  $C$  - inhaltlich wird dabei eine europäische Option durch eine Barrieroption mit zwei Knock-out Schwellen ersetzt. Die Berechnung der Hedge anhand fourieranalytischer Methoden wird in Abschnitt 2.3 behandelt.

**Satz 2.24.** *Sei  $H$  eine europäische Forderung mit lipschitzstetiger Auszahlungsfunktion  $H_p$ . Gilt entweder  $\sigma_X > 0$  oder*

$$\exists \beta \in ]0, 2[ \quad \liminf_{\epsilon \downarrow 0} \epsilon^{-\beta} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} |x| \nu_X(dx) > 0$$

*so gilt für  $C(t, S)$  aus Satz 2.19:  $C$  ist stetig auf  $[0, T] \times [0, \infty[$ , differenzierbar nach  $t$  und zweimal differenzierbar nach  $S$  auf  $]0, T[ \times ]0, \infty[$  und löst auf  $[0, T[ \times ]0, \infty[$  die partielle Integrodifferentialgleichung*

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t}(t, S) + rS \frac{\partial C}{\partial S}(t, S) + \frac{\sigma_X^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(t, S) - rC(t, S) \\ + \int (C(t, Se^x) - C(t, S) - S(e^x - 1) \frac{\partial C}{\partial S}(t, S)) \nu_X(dx) = 0 \end{aligned}$$

*mit Anfangsbedingung*

$$\forall S > 0 \quad C(T, S) = H_p(S).$$

*Das Problem ist gut gestellt und die Lösung ist eindeutig.*

*Bemerkung 2.25.* Ist  $P$  ein Martingalmaß, so ist (2.1) durch Satz 2.19 für eine breite Klasse von europäischen Forderungen gelöst. Im Allgemeinen gilt dies nicht und unsere Resultate wären erst nach einem Maßwechsel anwendbar. Wie bereits in Bemerkung 1.14 erwähnt, bedeutet Optimalität in einem äquivalenten Martingalmaß  $Q$  nicht Optimalität in  $P$  und  $Q$  ist nicht eindeutig. R. Cont et. al argumentieren in [9], dass die Wahl eines durch beobachtete Optionspreise kalibrierten Martingalmaßes der zukünftigen Marktsituation möglicherweise besser entspricht als das statistische Maß  $P$ . Im folgenden Abschnitt werden wir exponentielle Lévymodelle im nicht-Martingalfall betrachten. Grundlage unserer Überlegungen ist Satz 1.51: Ist der in (1.39) definierte mean-variance-tradeoff Prozess deterministisch, so erhalten wir eine einfache Darstellungsform der varianzoptimalen Handelsstrategie über die lokal-risikominimierende Handelsstrategie. Definieren wir ein zeitstetiges Äquivalent des mean-variance-tradeoff Prozesses, so ist dieser für exponentielle Lévymodelle stets deterministisch und wir können die Existenz einer varianzoptimalen Handelsstrategie über die Orthogonalzerlegung beweisen. Eine explizite Darstellung der Handelsstrategie lässt sich durch Verwendung der verallgemeinerten Fouriertransformation bestimmen.

## 2.3 Allgemeine exponentielle Lévy Modelle

Der folgende Abschnitt folgt [12], Kapitel 3 und 4.

**Definition 2.26.** *Exponentielles Lévy Modell 2:* Sei  $X = (X_t)_{0 \leq t \leq T}$ ,  $X_0 = 0$  ein Lévy Prozess mit charakteristischem Tripel  $(\mu, \sigma^2, \nu)$  wobei  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma^2 \in \mathbb{R}^+$  und  $\nu$  das zugehörige Lévy Maß ist. Für  $X$  gelte:

$$\int_{|x| \geq 1} e^{2x} \nu(dx) < \infty.$$

Der Preisprozess des risikolosen Bonds  $S^0$  ist wie zuvor definiert als

$$S_t^0 := e^{rt} \quad \forall t \in [0, T].$$

Der Preisprozess der Aktie  $S^1$  ist ein exponentieller Lévy Prozess gegeben durch

$$S_t^1 = \exp[rt + X_t] \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.18)$$

Die den Informationsverlauf beschreibende  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{F}$  sei gegeben durch

$$\mathcal{F}_t = \sigma(\{S_s^1 | s \leq t\} \cup \mathcal{N}).$$

Die Kumulantenerzeugende Funktion von  $X$  sei definiert als  $\kappa : D \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$E[e^{zX_t}] = e^{t\kappa(z)} \quad z \in D := \{z \in \mathbb{C} | E[e^{\operatorname{Re}[z]X_1}] < \infty\}.$$

Desweiteren sei die Doob-Zerlegung von  $\tilde{S}^1$  über

$$\tilde{S}_t^1 = \tilde{S}_0^1 + M_t + B_t$$

gegeben.  $M = (M_t)_{0 \leq t \leq T}$  ist ein lokales  $P$ -Martingal,  $B = (B_t)_{0 \leq t \leq T}$  ist ein vorhersagbarer Prozess mit endlicher Variation.  $|B|$  ist lokal quadratintegrierbar.

Die Klasse der zulässigen Forderungen sei für diesen Abschnitt durch Definition 1.54 gegeben. Wir definieren den zeitstetigen mean-variance-tradeoff-Prozess.

**Lemma 2.27.** *Sei  $z \in \mathbb{C}$  derart, dass  $(\tilde{S}_T^1)^z$  quadratintegrierbar ist. Dann ist  $(\tilde{S}^1)^z$  ein Semimartingal und die Doob-Zerlegung ist gegeben über*

$$(\tilde{S}_t^1)^z = (\tilde{S}_0^1)^z + M_t(z) + B_t(z),$$

wobei

$$B_t(z) = \kappa(z) \int_0^t (\tilde{S}_{u-}^1)^z du \quad (2.19)$$

und

$$\langle M(z), M(1) \rangle = (\kappa(z+1) - \kappa(z) - \kappa(1)) \int_0^t (\tilde{S}_{u-}^1)^{z+1} du. \quad (2.20)$$

gilt.  $\langle M(z), M(1) \rangle = (\langle M(z), M(1) \rangle_t)_{0 \leq t \leq T}$  bezeichnet dabei den vorhersagbaren Prozess mit endlicher Variation aus der Doob-Zerlegung von  $[M(z), M(1)]$

*Beweis.* Wir definieren den Prozess  $N(z) = (N_t(z))_{0 \leq t \leq T}$

$$N_t(z) := e^{-\kappa(z)t} (\tilde{S}_t^1)^z$$

Wegen Lemma 3.14 ist  $N(z)$  ein Martingal. Partielle Integration liefert

$$\begin{aligned} (\tilde{S}_t^1)^z &= e^{\kappa(z)t} N_t(z) = (\tilde{S}_0^1)^z + \int_0^t e^{\kappa(z)u} dN_u(z) + \kappa(z) \int_0^t (\tilde{S}_{u-}^1)^z du \\ &= (\tilde{S}_0^1)^z + M_t(z) + B_t(z) \end{aligned}$$

mit

$$M_t(z) = \int_0^t e^{\kappa(z)u} dN_u(z)$$

Wir betrachten die quadratische Kovariation

$$\begin{aligned} [M(z), M(1)]_t &= [(\tilde{S}^1)^z, \tilde{S}^1]_t = (\tilde{S}_t^1)^{z+1} - (\tilde{S}_0^1)^{z+1} - \int_0^t (\tilde{S}_{u-}^1)^z d\tilde{S}_u^1 - \int_0^t (\tilde{S}_{u-}^1) d(\tilde{S}_u^1)^z \\ &= - \int_0^t (\tilde{S}_{u-}^1)^z dM_u - \int_0^t (\tilde{S}_{u-}^1) dM_u(z) + M_t(z+1) \\ &\quad + (\kappa(z+1) - \kappa(z) - \kappa(1)) \int_0^t (\tilde{S}_{u-}^1)^{z+1} du \end{aligned}$$

Da  $M$  und  $M(z)$  lokale Martingale sind, sind auch die ersten drei Terme auf der rechten Seite lokale Martingale. Der vorhersagbare Anteil der Doob-Zerlegung von  $[M(z), M(1)]$  ist damit über (2.20) gegeben.  $\square$

**Definition 2.28.** *Seien*

$$\lambda = \frac{\kappa(1)}{\kappa(2) - 2\kappa(1)} \quad \text{und} \quad \lambda_u = \frac{\lambda}{\tilde{S}_{u-}^1}. \quad (2.21)$$

*Wir definieren den mean-variance-tradeoff Prozess  $W = (W_t)_{0 \leq t \leq T}$  als*

$$W_t = \int_0^t \lambda_u^2 d\langle M, M \rangle_u.$$

**Lemma 2.29.** *Der mean-variance-tradeoff Prozess ist deterministisch.*

*Beweis.* (2.20) liefert

$$\langle M, M \rangle_t = (\kappa(2) - 2\kappa(1)) \int_0^t (\tilde{S}_u^1)^2 du$$

und damit

$$W_t = \int_0^t \lambda_u^2 d\langle M, M \rangle_u = \frac{\kappa(1)^2}{\kappa(2) - 2\kappa(1)} t.$$

$\square$

*Bemerkung 2.30.* Unter der Annahme eines deterministischen mean-variance-tradeoff-Prozesses existiert für eine zulässige Forderung  $H$  wie im zeitdiskreten Fall eine Orthogonalzerlegung (Föllmer-Schweizer Zerlegung) von  $\tilde{H}$ .

**Satz 2.31.** Sei  $z \in \mathbb{C}$  derart, dass  $(\tilde{S}_1^1)^z \in \mathcal{L}^2$  erfüllt ist. Dann besitzt die Zufallsvariable  $H(z) = (\tilde{S}_T^1)^z$  eine Orthogonalzerlegung

$$H(z) = H(z)_0 + \int_0^T \xi(z)_t d\tilde{S}_t^1 + N^H(z)_T$$

mit

$$\begin{aligned} H(z)_t &:= e^{\eta(z)(T-t)} (\tilde{S}_t^1)^z \\ \xi(z)_t &:= \gamma(z) e^{\eta(z)(T-t)} (\tilde{S}_{t-}^1)^{z-1} \\ N^H(z)_t &:= H(z)_t - H(z)_0 - \int_0^t \xi(z)_u d\tilde{S}_u^1, \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} \gamma(z) &:= \frac{\kappa(z+1) - \kappa(z) - \kappa(1)}{\kappa(2) - 2\kappa(1)} \\ \eta(z) &:= \kappa(z) - \kappa(1)\gamma(z). \end{aligned}$$

Weiters gilt: der Prozess  $M = (M_t)_{0 \leq t \leq T}$  aus der Doob-Zerlegung von  $\tilde{S}^1$  ist ein quadratintegrierbares Martingal und  $N^H(z)M = (N^H(z)_t M_t)_{0 \leq t \leq T}$  ist ein Martingal.

*Beweis.* Sei die Doob-Zerlegung von  $(\tilde{S}^1)^z$  über 2.19 gegeben. Partielle Integration liefert

$$\begin{aligned} H(z)_t &= H(z)_0 + \int_0^t e^{\eta(z)(T-u)} d(\tilde{S}_u^1)^z - \eta(z) \int_0^t (\tilde{S}_u^1)^z e^{\eta(z)(T-u)} du \\ &= H(z)_0 - \eta(z) \int_0^t (\tilde{S}_u^1)^z e^{\eta(z)(T-u)} du + \int_0^t e^{\eta(z)(T-u)} dB(z)_u + \int_0^t e^{\eta(z)(T-u)} dM(z)_u \\ &= H(z)_0 + \int_0^t e^{\eta(z)(T-u)} dM(z)_u + (\kappa(z) - \eta(z)) \int_0^t e^{\eta(z)(T-u)} (\tilde{S}_{u-}^1)^z du. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen der Doob-Zerlegung folgt

$$\int_0^t \xi(z) d\tilde{S}_u^1 = \int_0^t \xi(z)_u dM(1)_u + \kappa(1)\gamma(z) \int_0^t e^{\eta(z)(T-u)} (\tilde{S}_{u-}^1)^z du.$$

Da

$$\kappa(z) - \eta(z) - \kappa(1)\gamma(z) = 0$$

folgt

$$N^H(z)_t = \int_0^t e^{\eta(z)(T-u)} dM(z)_u - \int_0^t \xi(z)_u dM(1)_u,$$

$N^h$  ist also ein lokales Martingal. Bezeichne wie  $\langle N^H(z), M(1) \rangle$  wie zuvor den vorher-sagbaren Anteil der Doob-Zerlegung von  $[N^H(z), M(1)]$ , dann folgt

$$\begin{aligned} \langle N^H(z), M(1) \rangle_t &= \int_0^t e^{\eta(z)(T-u)} d\langle M(z), M(1) \rangle_u - \int_0^t \xi(z)_u d\langle M(1), M(1) \rangle_u \\ &= (\kappa(z+1) - \kappa(z) - \kappa(1)) \int_0^t e^{\eta(z)(T-u)} (\tilde{S}_{u-}^1)^{z+1} du - (\kappa(2) - 2\kappa(1)) \int_0^t \xi(z)_u (\tilde{S}_{u-}^1)^2 du \\ &= (\kappa(z+1) - \kappa(z) - \kappa(1) - (\kappa(2) - 2\kappa(1))\gamma(z)) \int_0^t e^{\eta(z)(T-u)} (\tilde{S}_{u-}^1)^{z+1} du = 0 \end{aligned}$$

Der vorhersagbare Anteil von  $[N^H(z), M(1)]$  verschwindet, aus

$$N^H(z)M(1) - N^H(z)_0M(1)_0 = \int N^H(z)_{u-} dM(1)_u + \int M(1)_{u-} dN_u^H + [N^H(z), M(1)]$$

folgt, dass das Produkt  $N^H(z)M(1)$  ein lokales Martingal ist. Per Definition von  $N^H(z)$ ,  $H(z)$  und  $\xi(z)$  gilt

$$\begin{aligned} \overline{N^H(z)}_t &= \overline{H(z)}_t - \overline{H(z)}_0 - \int_0^t \overline{\xi(z)_u d\tilde{S}_u^1} \\ &= H(\bar{z})_t - H(\bar{z})_0 - \int_0^t \xi(\bar{z}) d\tilde{S}_u^1 = N^H(\bar{z})_t \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \langle N^H(z), \overline{N^H(z)} \rangle_t &= \langle N^H(z), N^H(\bar{z}) \rangle \\ &= (\kappa(2\operatorname{Re}[z]) - 2\operatorname{Re}[\kappa(z)] - \frac{|\kappa(z+1) - \kappa(z) - \kappa(1)|^2}{\kappa(2) - 2\kappa(1)}) \int_0^t e^{\operatorname{Re}[\eta(z)](T-t)} (\tilde{S}_{u-}^1)^{2\operatorname{Re}[z]} du. \end{aligned}$$

Aus

$$E[(\tilde{S}_{u-}^1)^{2\operatorname{Re}[z]}] = e^{t\kappa(\operatorname{Re}[z])} (\tilde{S}_0^1)^{2\operatorname{Re}[z]} \leq (\tilde{S}_0^1)^{2\operatorname{Re}[z]} \max[1, e^{T\kappa(\operatorname{Re}[z])}] < \infty \quad (2.22)$$

folgt

$$E[\langle N^H(z), \overline{N^H(z)} \rangle_T] < \infty.$$

Aus der partiellen Integration folgt nun, dass  $N^H(z)$  ein quadratintegrierbares Martingal ist. Durch gleiches Vorgehen für  $M(1)$  erhalten wir, dass  $M(1)$  ein quadratintegrierbares Martingal ist. Damit ist das Produkt  $N^H(z)M(1)$  ein Martingal. Da

$$\int_0^T |\xi(z)_u|^2 (\tilde{S}_{u-}^1)^2 du = |\gamma(z)|^2 \int_0^T e^{2\operatorname{Re}[\eta(z)](T-u)} (\tilde{S}_{u-}^1)^{2\operatorname{Re}[z]} dt \quad (2.23)$$

folgt mit 2.22, dass sowohl  $\operatorname{Re}[\xi(z)]$  als auch  $\operatorname{Im}[\xi(z)]$  zulässige Handelsstrategien sind. Damit ist die Orthogonalzerlegung wohldefiniert.  $\square$

Zur Verallgemeinerung von Satz 2.31 auf zulässige Forderungen benötigen wir folgende technische Vorbereitung.

**Lemma 2.32.** *Es gibt Konstanten  $C_1, \dots, C_5$  sodass folgende Aussagen gelten: Sei  $z \in \mathbb{C}$  mit*

$$a \leq \operatorname{Re}[z] \leq b \quad (2.24)$$

wobei  $a, b \in \mathbb{R}$  gemäß Definition 1.54 ausgewählt werden. Dann gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[\eta(z)] &\leq C_1 \\ |\gamma(z)|^2 &\leq -C_4 \operatorname{Re}[\eta(z)] + C_5 \end{aligned}$$

sowie

$$0 \leq \kappa(2\operatorname{Re}[z]) - 2\operatorname{Re}[\kappa(z)] - \frac{|\kappa(z+1) - \kappa(z) - \kappa(1)|^2}{\kappa(2) - 2\kappa(1)} \leq -C_2 \operatorname{Re}[\eta(z)] + C_3.$$

*Beweis.* Siehe [12], Kapitel 3 Lemma 3.4. □

**Satz 2.33.** *Jede zulässige Forderung  $\tilde{H} = f_p(\tilde{S}_T^1)$  gemäß Definition 1.54 besitzt eine Orthogonalzerlegung*

$$\tilde{H} = H_0 + \int_0^T \xi_t d\tilde{S}_t^1 + N_T^H.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} H_t &:= \int e^{\eta(z)(T-t)} (\tilde{S}_t^1)^z \Pi(dz) \\ \xi_t &:= \int \gamma(z) e^{\eta(z)(T-t)} (\tilde{S}_{t-}^1)^{z-1} \Pi(dz) \\ N_t^H &:= \int H_t(z) - H_0(z) - \left( \int_0^t \xi_u(dz) d\tilde{S}_u^1 \right) \Pi(dz) = H_t - H_0 - \int_0^t \xi_u d\tilde{S}_u^1. \end{aligned}$$

Die Prozesse  $H_t, \xi$  und  $N^H$  sind reellwertig.

*Beweis.* Im ersten Schritt zeigen wir, dass die definierten Prozesse wohldefiniert und quadratintegrierbar sind. Sei  $\tilde{H}$  eine zulässige Forderung und  $z \in \mathbb{C}$  mit

$$a \leq \operatorname{Re}[z] \leq b$$

gemäß Definition 1.54. Es gilt

$$\begin{aligned} E[|H(z)_t|^2] &= E[e^{2\operatorname{Re}[\eta(z)](T-t)} (\tilde{S}_t^1)^{2\operatorname{Re}[z]}] \leq E[e^{C_1(T-t)} (\tilde{S}_0^1)^{2\operatorname{Re}[z]} \max[1, e^{T\kappa(\operatorname{Re}[z])}]] \\ &\leq C_1(a, b). \end{aligned}$$

$C_1(a, b) \in \mathbb{R}$  ist eine Konstante, die von  $a, b$  abhängt. Daraus folgt,  $H_t$  ist wohldefiniert und eine quadratintegrierbare Zufallsvariable für alle  $t$ . Aus dem Zusammenhang

$$E[|N^H(z)_t|^2] = E[\langle N^H(z), \overline{N^H(z)} \rangle_t]$$

sowie

$$\begin{aligned}
& \langle N^H(z), \overline{N^H(z)} \rangle_t = \\
& = (\kappa(2\operatorname{Re}[z]) - 2\operatorname{Re}[\kappa(z)] - \frac{|\kappa(z+1) - \kappa(z) - \kappa(1)|^2}{\kappa(2) - 2\kappa(1)} \int_0^t e^{\operatorname{Re}[\eta(z)](T-t)} (\tilde{S}_{u-}^1)^{2\operatorname{Re}[z]} du \\
& \leq (\kappa(2\operatorname{Re}[z]) - 2\operatorname{Re}[\kappa(z)] - \frac{|\kappa(z+1) - \kappa(z) - \kappa(1)|^2}{\kappa(2) - 2\kappa(1)} \int_0^T e^{\operatorname{Re}[\eta(z)](T-u)} (\tilde{S}_{u-}^1)^{2\operatorname{Re}[z]} du \\
& \leq (\kappa(2\operatorname{Re}[z]) - 2\operatorname{Re}[\kappa(z)] \\
& \quad - \frac{|\kappa(z+1) - \kappa(z) - \kappa(1)|^2}{\kappa(2) - 2\kappa(1)} \int_0^T e^{C_1(T-u)} \max[(\tilde{S}_{u-}^1)^{2a}, (\tilde{S}_{u-}^1)^{2b}] du
\end{aligned}$$

folgt insgesamt

$$E[|N^H(z)_t|^2] \leq C_2(a, b).$$

$N^H(z)_t$  ist ebenfalls eine quadratintegrierbare Zufallsvariable. Analoges Vorgehen und Zusammenhang (2.23) liefern

$$\begin{aligned}
& E[|\xi(z)_t \tilde{S}_{t-}^1|^2] \leq C_3(t, a, b) \\
& E\left[\int_0^T |\xi(z)_u|^2 (\tilde{S}_{u-}^1)^2 du\right] \leq C_4(t, a, b)
\end{aligned}$$

mit Konstanten  $C_3(t, a, b), C_4(t, a, b)$ . Damit ist  $\xi$  wohldefiniert und sowohl Real- als auch Imaginärteil von  $\xi$  sind zulässige Handelsstrategien.

Im nächsten Schritt zeigen wir, dass  $N^H$  ein zu  $M$  orthogonales Martingal ist. Wir gehen dabei gleich wie im zeitdiskreten Fall vor, sei dazu  $A \in \mathcal{F}_u$  mit  $u \leq t$ . Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\int_A (N_t^H - N_u^H) dP &= \int_A \int (N^H(z)_t - N^H(z)_u) \Pi(dz) dP \\
&= \int \int_A (N^H(z)_t - N^H(z)_u) dP \Pi(dz) = 0 \\
&\Rightarrow E[N_t^H - N_u^H | \mathcal{F}_u] = 0.
\end{aligned}$$

$N^H$  ist ein quadratintegrierbares Martingal, analoges Vorgehen für das Produkt  $N^H M$  liefert die Orthogonalität von  $N^H$  und  $M$ . Erneutes Anwenden von Fubini liefert

$$\int \int_0^t \xi(z)_u d\tilde{S}_u^1 \Pi(dz) = \int_0^t \int \xi(z)_u \Pi(dz) d\tilde{S}_u^1 = \int \xi_u d\tilde{S}_u^1$$

und damit die gewünschte Darstellung von  $N^H$ . Wie im Zeitdiskreten ist die Orthogonalzerlegung (Föllmer-Schweizer-Zerlegung) von 0 eindeutig (siehe [14], *Theorem 3.4*) und die Prozesse  $H, \xi$  und  $N^H$  sind reellwertig.  $\square$

*Bemerkung 2.34.* Wie im zeitdiskreten Fall erhalten wir eine explizite Darstellung der Orthogonalzerlegung von zulässigen Forderungen. Eine Verallgemeinerung von Satz 1.51 auf zeitdiskrete Modelle ist möglich (siehe [4]). Mithilfe dieses Zusammenhangs erhalten wir eine explizite Darstellung der varianzoptimalen Handelsstrategie vgl.[12] Satz 3.1.

**Satz 2.35.** Sei  $\tilde{H}$  eine zulässige Forderung. Dann existiert eine zulässige varianzoptimale Handelsstrategie  $(V_0^*, \phi^*)$  gegeben durch

$$V_0^* = H_0 \quad (2.25)$$

und

$$\phi_t^* = \xi_t + \frac{\lambda}{\tilde{S}_{t-}^1} (H_{t-} - V_0^* - \int_0^{t-} \phi_u^* d\tilde{S}_u^1). \quad (2.26)$$

$\lambda, H_t$  und  $\xi$  sind gegeben über Satz 2.33 und (2.21).  $V_0^*$  ist eindeutig und  $\phi^*$  ist eindeutig bis auf  $(P(d\omega) \otimes dt)$ -Nullmengen.

*Beweis.* Die Existenz einer varianzoptimalen Handelsstrategie mit obiger Darstellung ist Inhalt von [4], wir beschränken uns auf den Beweis der Eindeutigkeit vgl.[12] Satz 3.1. Wir nehmen an es gäbe eine zweite varianzoptimale Handelsstrategie  $(V_0', \phi')$  und definieren

$$\hat{V}_0 := \frac{1}{2}(V_0^* + V_0') \quad \text{und} \quad \hat{\phi} := \frac{1}{2}(\phi^* + \phi').$$

Es folgt

$$E[(\hat{V}_0 + \int_0^T \hat{\phi}_t d\tilde{S}_t^1 - \tilde{H})^2] < \frac{1}{2}(E[(V_0' + \int_0^T \phi'_t d\tilde{S}_t^1 - \tilde{H})^2] + E[(V_0^* + \int_0^T \phi_t^* d\tilde{S}_t^1 - \tilde{H})^2]).$$

$(V_0^*, \phi^*)$  und  $(V_0', \phi')$  sind genau dann optimal, wenn

$$V_0^* = V_0' \quad \text{und} \quad \int_0^T \phi_t^* d\tilde{S}_t^1 = \int_0^T \phi'_t d\tilde{S}_t^1 \quad P\text{-f.s.}$$

erfüllt ist. Wir definieren  $N = (N_t)_{0 \leq t \leq T}$

$$N_t := \int_0^t \lambda_u dM_u.$$

Aus (2.20) und partieller Integration folgt

$$\langle N, N \rangle_T = \int_0^T \lambda_u^2 d\langle M, M \rangle_u = W_T$$

Aus Satz 3.25 folgt, dass der Prozess  $U = (U_t)_{0 \leq t \leq T}$  mit

$$U_t := \int_0^t (\phi_u^* - \phi'_u) d\tilde{S}_u^1$$

ein  $\mathcal{E}$ -Martingal gemäß Definition 3.24 ist und eindeutig durch den Endwert  $U_T$  festgelegt ist. Da  $U_T = 0$  folgt  $U_t = 0 \forall t \in [0, T]$ . Für die quadratische Variation gilt auf Grund von (2.20) und dem Beweis zu Lemma 2.27

$$\begin{aligned} 0 &= E[[U, U]_T] = E\left[\int_0^T (\phi_t^* - \phi'_t)^2 d[\tilde{S}^1, \tilde{S}^1]_t\right] = E\left[\int_0^T (\phi_t^* - \phi'_t) d[M, M]_t\right] \\ &= E\left[\int_0^T (\phi_t^* - \phi'_t) d\langle M, M \rangle_t\right] = (\kappa(2) - 2\kappa(1))E\left[\int_0^T (\phi^* - \phi')^2 (\tilde{S}_{t-}^1)^2 dt\right]. \end{aligned}$$

Damit gilt  $\phi^* = \phi'$   $(P(d\omega) \otimes dt)$ -f.s.. □

*Bemerkung 2.36.* Wie im zeitdiskreten Fall (Satz 1.51) lässt sich die varianzoptimale Handelsstrategie als Summe der lokal risikominimierenden Handelsstrategie gegeben über die Orthogonalzerlegung (Föllmer-Schweizer Zerlegung) sowie den zusätzlichen Aufwendungen, die durch das Optimalitätskriterium entstehen. Call- und Put-Optionen sind zulässige Forderungen, komplizierter Auszahlungsfunktionen lassen sich, wie in Bemerkung 2.20 erwähnt, durch diese beliebig genau Nachbilden. Für die Varianz des Hedgingfehlers gilt folgender Satz (vgl. [12] Satz 3.2).

**Satz 2.37.** *Die Varianz des Hedgingfehlers von (2.1) ist durch*

$$J_0 = \int \int J_0(y, z) \Pi(dy) \Pi(dx)$$

gegeben, wobei

$$J_0(y, z) := \begin{cases} (\tilde{S}_0^1)^{y+z} \beta(y, z) \frac{e^{\alpha(y, z)T} - e^{\kappa(y+z)T}}{\alpha(y, z) - \kappa(y+z)}, & \text{wenn } \alpha(y, z) \neq \kappa(y+z) \\ (\tilde{S}_0^1)^{y+z} \beta(y, z) T e^{\kappa(y+z)T}, & \text{wenn } \alpha(y, z) = \kappa(y+z) \end{cases}$$

sowie

$$\begin{aligned} \alpha(y, z) &:= \eta(y) + \eta(z) - \frac{\kappa(1)^2}{\kappa(2) - 2\kappa(1)} \\ \beta(y, z) &:= \kappa(y+z) - \kappa(y) - \kappa(z) - \frac{\varpi(y)\varpi(z)}{\kappa(2) - 2\kappa(1)} \\ \varpi(y) &:= \kappa(y+1) - \kappa(y) - \kappa(1). \end{aligned}$$

*Beweis.* Siehe [12], Satz 3.2

□

# Kapitel 3

## Anhang

### 3.1 Zeitdiskrete Martingale

Folgende Aussagen behandeln die Kunita-Watanabe-Zerlegung zeitdiskreter stochastischer Prozesse sowie Eigenschaften zeitdiskreter Martingale (vgl. [7] Teil 2).

**Lemma 3.1.** *Seien  $M, N$  zwei quadratintegrierbare Martingale, folgende Aussagen sind äquivalent*

(a)  *$M$  und  $N$  sind stark orthogonal zueinander*

(b) *Das Produkt  $MN$  ist ein Martingal*

*Beweis.* Aus der Martingaleigenschaft von  $M$  und  $N$  folgt

$$E[(\Delta M_{t+1})(\Delta N_{t+1})|\mathcal{F}_t] = E[M_{t+1}N_{t+1}|\mathcal{F}_t] - M_tN_t \quad (3.1)$$

die letzte Seite ist genau dann 0, wenn  $MN$  ein Martingal ist.  $\square$

**Proposition 3.2.** *Es bezeichne in Folge  $\mathcal{M}^2$  den Raum der quadratintegrierbaren Martingale*

$$\mathcal{M}^2 := \{M = (M_t)_{t \in \{0, \dots, T\}} \mid M \in L^2, \text{ Martingal}\} \quad (3.2)$$

*Mittels der Identität*

$$M_t = E[M_T|\mathcal{F}_t] \quad (3.3)$$

*identifizieren wir jedes  $M \in \mathcal{M}^2$  mit seinem Endwert  $M_T \in L^2$ . Betrachten wir weiters die Äquivalenzklassen der  $P$ -f.s. Zufallsvariablen, dann ist  $\mathcal{M}^2$  ein Hilbertraum isomorph zu  $L^2$  mit dem Skalarprodukt*

$$(M, N)_{\mathcal{M}^2} := E[M_T N_T] \quad \forall M, N \in \mathcal{M}^2$$

**Satz 3.3.** *Kunita-Watanabe Zerlegung:*

Sei  $\tilde{S}^1$  ein quadratintegrierbares Martingal unter  $P$ . Dann besitzt jedes  $M \in \mathcal{M}^2$  eine Zerlegung

$$M_t = M_0 + \sum_{s=1}^t \phi_s^1 \Delta \tilde{S}_s^1 + L_t \quad (3.4)$$

hierbei ist  $\phi^1$  ein adaptierter vorhersagbarer Prozess mit

$$\phi_t^1 \Delta \tilde{S}_t^1 \in L^2 \quad \forall t$$

$L$  ist ein quadratintegrierbares  $P$ -Martingal stark orthogonal zu  $\tilde{S}^1$  und  $L_0$ . Weiters ist die Zerlegung eindeutig in dem Sinne, dass  $L$   $P$ -f.s. eindeutig bestimmt ist.

*Beweis.* Siehe [7], S. 356-357 □

**Lemma 3.4.** *Sei  $Q$  ein zu  $P$  äquivalentes Maß. Ein adaptierter Prozess  $M$  ist genau dann ein  $Q$ -Martingal, wenn der Prozess*

$$M_t E\left[\left(\frac{dQ}{dP}\right) \middle| \mathcal{F}_t\right] \quad \forall t \in \{0, \dots, T\}$$

ein  $P$ -Martingal ist.

*Beweis.* Siehe [7], S. 359. □

Folgende Proposition ist eine zeitdiskrete Formulierung des Exponentialprozesses.

**Proposition 3.5.** *Sei  $Q$  ein zu  $P$  äquivalentes Maß. Dann existiert ein  $P$ -Martingal  $\Lambda$  mit*

$$\Lambda_0 = 1 \text{ sowie } \Delta \Lambda_{t+1} > -1 \quad P\text{-f.s. } \forall t \in \{0, \dots, T\} \quad (3.5)$$

sodass das Martingal (Dichteprozess von  $Q$  bzgl.  $P$ )

$$Z_t := E\left[\frac{dQ}{dP} \middle| \mathcal{F}_t\right] \quad \forall t \in \{0, \dots, T\}$$

die Darstellung

$$Z_t = \prod_{s=1}^t (1 + \Delta \Lambda_s) \quad \forall t \in \{0, \dots, T\} \quad (3.6)$$

besitzt. Ist  $\Lambda$  ein  $P$ -Martingal, das (3.5) erfüllt, dann ist  $Z$  ein  $P$ -Martingal und

$$dQ := Z_T dP \quad (3.7)$$

definiert ein zu  $P$  äquivalentes Maß  $Q$ .

*Beweis.* Siehe [7], S. 359f. □

*Bemerkung 3.6.* Für gegebenes  $\Lambda$  löst  $Z$  die Differenzengleichung

$$\Delta Z_t = Z_{t-1} \Delta \Lambda_t \quad Z_0 = 1$$

bzw. die äquivalente Integralgleichung

$$Z_t - 1 = (Z^{-1} \cdot \Lambda)_t$$

mit

$$Z_t^{-1} := Z_{t-1}.$$

Insbesondere gilt, dass  $Z$  ein P-Martingal ist, wenn  $\Lambda$  ein P-Martingal ist. Der Dichteprozess jedes äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaßes lässt sich als Exponentialprozess eines Martingals  $\Lambda$  schreiben.

## 3.2 Lévy Prozesse

Inhalt dieses Abschnitts sind grundlegende Eigenschaften von Lévy Prozessen *vgl.* [8] Kapitel 2, 3, 8.

**Definition 3.7.** Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum,  $E \subset \mathbb{R}$  und  $\mu$  ein positives Radon-Maß auf dem Messraum  $(E, \mathcal{E})$ . Ein Zufallsmaß

$$\begin{aligned} M : \Omega \times E &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (\omega, A) &\longmapsto M(\omega, A) \end{aligned}$$

heißt *Poisson Zufallsmaß mit Intensitätsmaß  $\mu$* , wenn für  $M$  gilt:

- Für fast alle  $\omega \in \Omega$  ist  $M(\omega, \cdot)$  ein Radon Maß auf  $E$  mit Werten in  $\mathbb{N}$ .
- Für jede messbare Menge  $A \subset E$  ist  $M(\cdot, A) = M(A)$  eine poissonverteilte Zufallsvariable mit Intensität  $\mu(A)$ , d.h.

$$P(M(A) = k) = e^{-\mu(A)} \frac{(\mu(A))^k}{k!}$$

- Seien  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}$  disjunkt, dann sind die Zufallsvariablen  $M(A_1), \dots, M(A_n)$  unabhängig.

**Definition 3.8.** Sei  $X = (X_t)_{0 \leq t \leq T}$  ein Lévy Prozess. Das Sprungmaß  $J_X$  von  $X$  ist definiert durch

$$J_X(B) = \#\{(t, \Delta X_t) \in B\} \quad B \in \mathbb{R} \times [0, \infty[.$$

**Definition 3.9.** Sei  $X = (X_t)_{0 \leq t \leq T}$  ein Lévy Prozess. Das Lévy Maß  $\nu$  von  $X$  ist definiert durch

$$\nu(A) = E[\#\{t \in [0, 1] : \Delta X_t \neq 0, \Delta X_t \in A\}] \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

**Satz 3.10.** *Lévy-Itô Zerlegung:*

Sei  $X = (X_t)_{0 \leq t \leq T}$  ein Lévy Prozess mit Lévy Maß  $\nu$ . Dann gilt:

- $\nu$  ist ein Radon Maß auf  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  und es gilt:

$$\int_{|x| \leq 1} |x|^2 \nu(dx) < \infty \quad \text{sowie} \quad \int_{|x| \geq 1} \nu(dx) < \infty.$$

- Das Sprungmaß  $J_X$  ist ein Poisson Zufallsmaß auf  $[0, \infty[ \times \mathbb{R}$  mit Intensitätsmaß  $\nu(dx)dt$ .
- Es existieren Konstante  $\gamma \in \mathbb{R}, \sigma^2 \in \mathbb{R}^+$  und eine Brownsche Bewegung  $B = (B_t)_{0 \leq t \leq T}$ , sodass  $X$  folgende Zerlegung besitzt:

$$X_t = \gamma t + \sigma B_t + \int_{\substack{|x| \geq 1 \\ s \in [0, T]}} x J_X(ds \times dx) + \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\substack{\epsilon \leq |x| \leq 1 \\ s \in [0, t]}} x J_X^c(ds \times dx)$$

mit  $J_X^c(ds \times dx) = J_X(ds \times dx) - \nu(dx)ds$ . Die Terme sind unabhängig und der Grenzwert konvergiert fast sicher und gleichmäßig in  $t$  auf  $[0, T]$ .

*Bemerkung 3.11.* Gilt zusätzlich

$$\int_{|x| \leq 1} |x| \nu(dx) < \infty,$$

dann vereinfacht sich die Lévy-Itô Zerlegung von  $X$  zu

$$X_t = \gamma t + \sigma B_t + \int_{\substack{x \in \mathbb{R} \\ s \in [0, T]}} x J_X(ds \times dx) - t \int_{|x| \leq 1} x \nu(dx)$$

und das Integral

$$\int_{\substack{x \in \mathbb{R} \\ s \in [0, T]}} x J_X(ds \times dx)$$

kann als zusammengesetzter Poisson Prozess betrachtet werden. Im Speziellen hat der Sprunganteil des Prozesses  $X$  endliche Variation.

**Satz 3.12.** *Levy-Khinchine-Formel:*

Sei  $X = (X_t)_{0 \leq t \leq T}$  ein adaptierter Lévy Prozess mit charakteristischem Tripel  $(\mu, \sigma^2, \nu)$  wobei  $\mu \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}$  und  $\nu$  das Lévy Maß von  $X$  ist. Dann gilt  $\forall z \in \mathbb{R}$ :

$$E[e^{izX_t}] = e^{t\psi(z)} \tag{3.8}$$

wobei

$$\psi(z) := i\mu z - \frac{1}{2}z^2\sigma^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^{izx} - izxI_{\{|x| \leq 1\}}(x) - 1)\nu(dx). \tag{3.9}$$

**Lemma 3.13.** Sei  $X = (X_t)_{0 \leq t \leq T}$  ein adaptierter Lévy Prozess mit charakteristischem Tripel  $(\mu, \sigma^2, \nu)$  wobei  $\mu \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}$  und  $\nu$  das Lévy Maß von  $X$  ist. Sei  $u \in \mathbb{R}$ . Es gilt:

$$E[e^{uX_t}] < \infty \quad \forall t \in [0, T] \iff \int_{|x| \geq 1} e^{ux} \nu(dx) < \infty$$

**Lemma 3.14.** Sei  $X = (X_t)_{0 \leq t \leq T}$  ein adaptierter Lévy Prozess mit charakteristischem Tripel  $(\mu, \sigma^2, \nu)$  wobei  $\mu \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}$  und  $\nu$  das Lévy Maß von  $X$  ist. Der Prozess  $Y = (Y_t)_{0 \leq t \leq T}$  mit

$$Y_t := e^{X_t} \quad \forall t \in [0, T]$$

ist genau dann ein Martingal, wenn

$$\int_{|x| \geq 1} e^x \nu(dx) < \infty$$

und

$$\frac{1}{2} \sigma^2 + \mu + \int_{\mathbb{R}} (e^x - 1 - xI_{\{|x| \leq 1\}}(x)) \nu(dx) = 0.$$

**Lemma 3.15.** Sei  $X = (X_t)_{0 \leq t \leq T}$  ein Lévy Prozess mit charakteristischem Tripel  $(\mu, \sigma^2, \nu)$ .  $X$  ist genau dann ein Martingal, wenn

$$\int_{|x| \geq 1} |x| \nu(dx) < \infty \quad \text{und} \quad \mu + \int_{|x| \geq 1} x \nu(dx) = 0$$

**Lemma 3.16.** Isometrieformel Brownsche Bewegung:

Sei  $\phi = (\phi_t)_{0 \leq t \leq T}$  ein vorhersagbarer Prozess mit

$$E\left[\int_0^T |\phi_t|^2 dt\right] < \infty$$

und  $W = (W_t)_{0 \leq t \leq T}$  eine Brownsche Bewegung. Dann ist  $Y = (Y_t)_{0 \leq t \leq T}$  mit

$$Y_t = \int_0^t \phi_u dW_u$$

ein quadratintegrierbares Martingal und

$$\begin{aligned} E\left[\int_0^T \phi_u dW_u\right] &= 0 \\ E\left[\left|\int_0^T \phi_u dW_u\right|^2\right] &= E\left[\int_0^T |\phi_u|^2 du\right] \end{aligned}$$

**Lemma 3.17.** Sei  $\phi$  eine vorhersagbare Zufallsfunktion  $\phi : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $M$  ein Poisson Zufallsmaß mit Intensität  $\mu(dt \times dx)$ . Gilt

$$E\left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |\phi(t, y)|^2 \mu(dt \times dy)\right] < \infty$$

dann folgt:

- Der durch die Abbildung

$$t \mapsto \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \phi(s, y) M^c(ds \times dy)$$

definierte Prozess ist ein quadratintegrierbares Martingal.

- Es gilt

$$E\left[\left|\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \phi(s, y) M^c(ds \times dy)\right|^2\right] = E\left[\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} |\phi(s, y)|^2 \mu(ds \times dy)\right].$$

**Lemma 3.18.** Sei  $X = (X_t)_{0 \leq t \leq T}$  ein Lévy Prozess und ein Martingal. Dann ist der Exponentialprozess  $Z = (Z_t)_{0 \leq t \leq T}$

$$dZ_t = Z_{t-} dX_t \quad Z_0 = 1$$

ein Martingal.

**Satz 3.19.** Itô-Formel für Lévy Prozesse:

Sei  $X = (X_t)_{0 \leq t \leq T}$  ein Lévy Prozess mit char. Tripel  $(\mu, \sigma^2, \nu)$  und  $f \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} f(t, X_t) - f(0, X_0) &= \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(u, X_{u-}) dX_u + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial u}(u, X_u) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u, X_u) du \\ &\quad + \sum_{\substack{0 \leq u \leq t \\ \Delta X_u \neq 0}} f(u, X_{u-} + \Delta X_u) - f(u, X_{u-}) - \Delta X_u \frac{\partial f}{\partial x}(u, X_{u-}). \end{aligned}$$

### 3.3 Fourieranalyse

Folgende Sätze folgen Formulierungen aus [12].

**Definition 3.20.** Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  eine messbare Funktion. Die bilaterale Laplacetransformierte  $\tilde{f}$  ist definiert als

$$\tilde{f}(z) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-zx} dx \quad (3.10)$$

$\forall z \in \mathbb{C}$  sodass das Integral existiert.

**Bemerkung 3.21.** Es gilt

$$\tilde{f}(u + iv) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-(u+iv)x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ux} f(-x) e^{ivx} dx,$$

die bilaterale Laplacetransformation  $\tilde{f}$  entspricht der verallgemeinerten Fouriertransformation der Funktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$g(x) = e^{ux} f(-x).$$

**Satz 3.22.** Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  eine messbare Funktion und  $\tilde{f}(R + iv)$  existiert für  $R \in \mathbb{R}$ .

- Ist die Abbildung

$$v \mapsto \tilde{f}(R + iv)$$

integrierbar, dann ist die Abbildung

$$x \mapsto f(x)$$

$\lambda$ -f.s. stetig und es gilt

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{R-i\infty}^{R+i\infty} \tilde{f}(z) e^{zx} dz \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Ist  $f$  von endlicher Variation auf kompakten Intervallen, dann gilt

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} (f(x + \epsilon) + f(x - \epsilon)) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{R-i\infty}^{R+i\infty} \tilde{f}(z) e^{zx} dz \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Definition 3.23.** Sei  $(\Omega, \mathcal{F})$  ein Messraum und  $\mu$  ein komplexes Maß auf  $(\Omega, \mathcal{F})$ . Die totale Variation von  $\mu$  ist durch

$$|\mu|(E) = \sup \sum_i |\mu(E_i)|$$

für  $E \in \mathcal{F}$  definiert. Das Supremum wird über alle Partitionen

$$\{(E_i)_{i \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}} \mid \bigcup E_i = E, E_i \cap E_j = \emptyset \quad \forall i \neq j\}$$

von  $E$  gebildet.

### 3.4 $\mathcal{E}$ -Martingale

**Definition 3.24.** Sei  $X = (X_t)_{0 \leq t \leq T}$  ein càdlàg-Prozess und  $N = (N_t)_{0 \leq t \leq T}$  ein lokales Martingal mit  $N_0 = 0$ . Bezeichne  $\varepsilon(N) = (\varepsilon(N)_t)_{0 \leq t \leq T}$  den Exponentialprozess von  $N$  nach Satz 2.15. Wir definieren eine Familie von Stoppzeiten

$$T_0 = 0 \quad \text{und} \quad T_{n+1} = \inf\{t > T_n \mid \varepsilon(N - N^{T_n}) = 0\} \wedge T.$$

$X$  ist ein  $\mathcal{E}(N)$ -Martingal, wenn folgendes gilt:

- $E[X_{T_n} \varepsilon(N - N^{T_n})_{T_{n+1}}] < +\infty$ .
- $(X - X^{T_n}) \varepsilon(N - N^{T_n})$  ist für alle  $n \geq 0$  ein Martingal.

Satz 3.25 fasst mehrere Resultate aus [13] zusammen.

**Satz 3.25.** *Sei  $X$  ein Semimartingal mit kanonischer Zerlegung*

$$X = X_0 + M + A.$$

*$M$  ist ein lokales Martingal und  $A$  ist ein vorhersagbarer Prozess mit endlicher Variation. Sei  $N = (N_t)_{0 \leq t \leq T}$  definiert als*

$$N_t := - \int_0^t \lambda_u dM_u$$

*wobei  $\lambda = (\lambda_t)_{0 \leq t \leq T} \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Bezeichne weiters  $\varepsilon(N) = (\varepsilon(N)_t)_{0 \leq t \leq T}$  den Exponentialprozess von  $N$  nach Satz 2.15. Ist  $\varepsilon(N - N^{T_n})$  ein Martingal für alle  $n \geq 0$ , dann gilt:*

*$H \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$  besitzt genau dann eine Orthogonalzerlegung (Föllmer-Schweizer Zerlegung), wenn  $H$  der Endwert eines  $\mathcal{E}(N)$ -Martingals  $Y$  ist.*

# Literaturverzeichnis

- [1] Martin Schweizer, *Variance-Optimal Hedging in Discrete Time*, Mathematics of Operations Research 20 , 1995, Seite 1-32
- [2] M. Schweizer, *Mean-Variance Hedging for General Claims*, Annals of Applied Probability 2, Seite 171-179
- [3] M. Schweizer, *A New Characterization of the Martingale Property*, 1993.
- [4] M. Schweizer, *Approximating Random Variables by Stochastic Integrals* Annals of Applied Probability 3 ,1994 , Seite 1536-1575
- [5] D. Luenberger, *Optimization by Vector Space Methods*, Wiley, 1969.
- [6] D. Duffie and H. R. Richardson, *Mean-Variance Hedging in Continuous Time*, Annals of Applied Probability 1 1991, Seite 1-15
- [7] H. Föllmer and Alexander Schied, *Stochastic Finance, An Introduction in Discrete Time*, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 2002.
- [8] R. Cont and P. Tankov *Financial Modelling With Jump Processes* Chapman and Hall/CRC, Financial Mathematics Series, 2004
- [9] R. Cont, P. Tankow, E. Voltchkova *Hedging with options in models with jumps* Abel Symposium 2005 on Stochastic analysis and applications, Seite 1-22
- [10] M. Schweizer *On the Minimal Martingale Measure and the Föllmer-Schweizer Decomposition* Stochastic Analysis and Applications 13 1995, Seite 573-599
- [11] H. Heuser, *Funktionalanalysis Theorie und Anwendung*, B. G. Teubner Verlag, Wiesbaden, 2006.
- [12] F. Hubalek, J. Kallsen and L. Krawczyk *Variance-Optimal Hedging for Processes with Stationary Independent Increments* Annals of Applied Probability 2 2006, Seite 853-885
- [13] T. Choulli, L. Krawczyk and C. Stricker  *$\mathcal{E}$ -Martingales and their Application in Mathematical Finance* Annals of Probability No. 2, Vol. 26, 1998, Seite 853-876

- 
- [14] P. Monat, C. Stricker *Föllmer-Schweizer Decomposition and Mean-Variance Hedging for General Claims* Annals of Probability No. 2, Vol. 23, 1995, Seite 605-628
  - [15] Ken-Iti Sato *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions* Cambridge University Press, 2005
  - [16] W. Rudin *Real and Complex Analysis* McGraw-Hill, 3rd. Edition, 1987
  - [17] M. Schweizer *Mean-variance Hedging* Encyclopedia of Quantitative Finance, Wiley, 2010, Seite 1177-1181
  - [18] M. Schäl *On Quadratic Cost Criteria for Option Hedging* Mathematics of Operations Research 19, 1994, Seite 121-131