

## **Innovative Simulationenmethoden im Tunnelbau**

**Gernot Beer, Christian Dünser, Jürgen Zechner und Bernhard Lindner**

*Institut für Baustatik, Technische Universität Graz*

**Zusammenfassung:** Eine alternative Simulationenmethode für den Tunnelbau wird vorgestellt. Die Vorteile gegenüber derzeit verwendeten Methoden sind ein geringerer Rechenaufwand, erhöhte Benutzerfreundlichkeit und bessere Qualität der Ergebnisse. Die theoretischen Grundlagen werden kurz vorgestellt und die Zuverlässigkeit mit Testbeispielen und Problemstellungen aus der Praxis gezeigt.

### **1 EINLEITUNG**

Für numerische Analysen im Tunnelbau werden fast ausschließlich volumenbasierte Methoden, wie die Methode der Finiten Elemente (FEM) oder die Methode der Finiten Differenzen (FDM), verwendet. Da die Modellierung von Untertagebauten im unendlichen oder halb-unendlichen Raum stattfindet, muss ein Gebiet herausgelöst werden und es müssen künstliche Randbedingungen aufgebracht werden. Dies resultiert in einer Nichterfüllung der Abstrahlbedingung, was ein wesentlicher Nachteil dieser Methoden ist. Die Größe dieses Gebietes muss a priori so gewählt werden, dass der Fehler aufgrund der Einführung des künstlichen Randes minimiert wird.

Außerdem ist die Qualität der Ergebnisse volumenbasierter Methoden stark vom verwendeten Elementansatz abhängig. Für 3-D-Simulationen sind Netze mit Millionen Unbekannten keine Seltenheit, wobei ein erheblicher Anteil an Elementen für die Diskretisierung des Fernbereiches, für welchen die Resultate von untergeordnetem Interesse sind, verwendet werden muss. Komplizierte Aushubsgeometrien sind auch mit modernen automatischen Netzgeneratoren schwer vernetzbar und ungünstige Geometrien der Elemente sind dabei nicht auszuschließen. Obwohl effiziente Lösungsalgorithmen entwickelt wurden, können die Rechenzeiten und der Speicherplatzbedarf signifikant sein.

Eine Alternative zu den volumenbasierten Methoden ist die Methode der Randelemente (BEM). Bei dieser treten die Unbekannten nur am Rand (Ausbruchsfläche, Geländeoberfläche) auf und die Abstrahlbedingung wird genau erfüllt. Die verwendeten Ansatzfunktionen erfüllen die Differentialgleichung (Gleichgewicht, Verträglichkeit) exakt. Die Methode ist daher ideal für Simulationen in der Geotechnik geeignet. Hierfür wichtige Aspekte wie z.B. der sequenzielle Aushub oder die Modellierung von Stützmitteln wurden erst kürzlich entwi-

ckelt, sodass die BEM in diesem Anwendungsgebiet derzeit nur eingeschränkte Verwendung findet.

## 2 DIE METHODE DER RANDELEMENTE

### 2.1 Grundlagen

Im Folgenden wird eine kurze Einführung in die Methode der Randelemente gegeben. Der wichtigste Unterschied besteht im Ansatz für die Verformungen, welcher in der FEM lokal für jedes Element, bei der BEM jedoch global definiert ist.

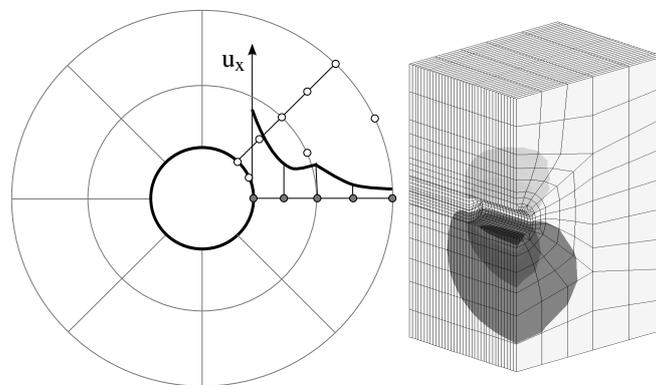


Abbildung 1: Tunnelsimulation: Verformungsansatz bei der FEM

Abb. 1 zeigt, dass die  $C^1$ -Kontinuität der Verformungen bei der FEM nicht gewährleistet ist, während die BEM (siehe Abb. 2) nicht nur diese sondern auch die Differentialgleichung der Elastostatik (Navier-Cauchy) genau erfüllt. Die Abstrahlbedingung ist erfüllt, d.h. die Verformungen klingen, wie gefordert, im Unendlichen ab.

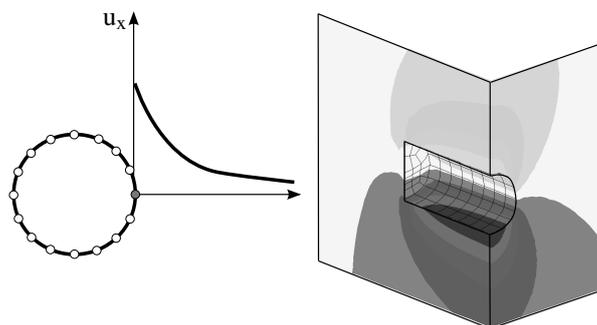


Abbildung 2: Tunnelsimulation: Verformungsansatz bei der BEM

Aus dem Satz von Betti ergibt sich die Integralgleichung [1]

$$c\mathbf{u} = \int_S \mathbf{U} \cdot \mathbf{t} \, dS - \int_S \mathbf{T} \cdot \mathbf{u} \, dS + \int_V \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\sigma}_0 \, dV, \quad (1)$$

wobei  $c$  eine Konstante,  $\mathbf{u}$  der Verformungs- und  $\mathbf{t}$  der Randspannungsvektor ist.  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{T}$  und  $\mathbf{E}$  sind Tensorfunktionen, welche die Differentialgleichung genau erfüllen. Diese setzen sich aus sogenannten Fundamentallösungen zusammen, welche Lösungen aufgrund einer Einzellast im Raum sind. Diese liegen für elastische, isotrope oder anisotrope homogene Materialien vor. Gl. 1 gilt zunächst also nur für homogene Materialien. Trotzdem ist die Behandlung von heterogenen, inelastischen Materialien mit der BEM möglich.

Das Integrationsgebiet der ersten beiden Integrale in Gl. 1 ist der Rand, jenes des dritten Integrals das Volumen. Dieses tritt jedoch nur auf wenn Körperkräfte im Inneren vorhanden sind. Dies ist bei nichtlinearem Materialverhalten, Inhomogenitäten oder Felsankern der Fall. Diese Effekte werden über eine initiale Spannung  $\boldsymbol{\sigma}_0$  berücksichtigt. Für die numerische Lösung von Gl. 1 wird das Problem in Randelemente und Volumenzellen diskretisiert. Dabei wählt man einen entsprechenden Ansatz für die Weg- und Kraftgrößen am Rand

$$\mathbf{u} = \sum N_i(\xi_1, \xi_2) \cdot \mathbf{u}_i \quad \mathbf{t} = \sum N_i(\xi_1, \xi_2) \cdot \mathbf{t}_i \quad (2)$$

und die Spannungen an den Zellknoten

$$\boldsymbol{\sigma}_0 = \sum N_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \cdot \boldsymbol{\sigma}_{0i} \quad \boldsymbol{\sigma}_{0,\text{lin}} = \sum N_i(\xi_1) \cdot \boldsymbol{\sigma}_{0i}. \quad (3)$$

Die, für die Diskretisierung notwendigen, Elemente sind in Abb. 3 dargestellt wobei (a) ein Randelement mit quadratischem Ansatz, (b) eine Zelle für die Bestimmung des Volumenintegrals und (c) eine Zelle für die Modellierung von Felsankern zeigt. In Gl. 2 sind  $N_i$  quadratische Funktionen und  $\mathbf{u}_i$  sowie  $\mathbf{t}_i$  Werte für die Verformung und Randspannung an den Knotenpunkten am Rand und  $\boldsymbol{\sigma}_{0i}$  Werte von initialem Spannungen an den Zellknoten.

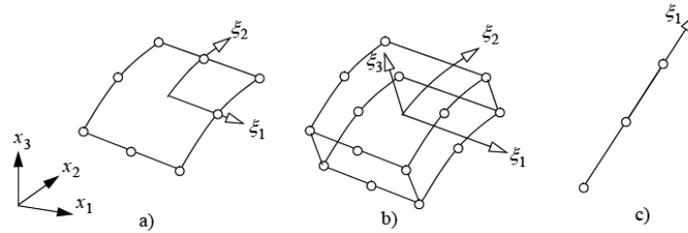


Abbildung 3: Elemente zur Diskretisierung bei der BEM

Nun kann für das Problem ein diskretes Gleichungssystem in Matrixform

$$[\mathbf{T}]\{\mathbf{u}\} = [\mathbf{U}]\{\mathbf{t}\} + [\mathbf{E}]\{\boldsymbol{\sigma}_0\} \quad (4)$$

aufgestellt werden, welches nach Aufteilung in bekannte und komplementäre, unbekannte Randdaten gelöst werden kann. Bei Simulationen im Tunnelbau sind die Randspannungen  $\mathbf{t}$  üblicherweise bekannt und die Verformungen  $\mathbf{u}$  unbekannt. Die Anzahl der Unbekannten wird durch die Existenz von Volumenkräften allerdings *nicht* erhöht.

## 2.2 Berücksichtigung von Inhomogenitäten

Wie eingangs erwähnt, treten bei der klassischen BEM nur Oberflächenintegrale auf, die zur Berechnung von Tunneln in homogenen, elastischen Böden verwendet werden können. Für praktische Fragestellungen im Tunnelbau würde dies eine zu große Einschränkung darstellen. Die Berücksichtigung von Volumseffekten macht die Berechnung von Tunneln in heterogenen, in-elastischen Böden möglich. Geologische Verhältnisse werden als Einschlüsse von Materialien mit unterschiedlichen Eigenschaften modelliert. Auf ähnliche Weise können Felsanker und nichtlineares Materialverhalten berücksichtigt werden.

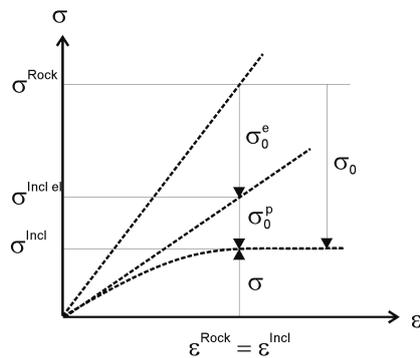


Abbildung 4: Berechnung der initiellen Spannungen

Dies wird auf iterative Weise wie folgt berücksichtigt:

1. Zunächst wird ein elastisches, homogenes Material angenommen und eine Berechnung durchgeführt.
2. Aus den Verformungen am Rand kann die Dehnung  $\varepsilon$  an den Knotenpunkten der Zellen bestimmt werden, indem man Gl. 1 nach Raumkoordinaten ableitet.
3. Soll in den Zellen unterschiedliches Material simuliert werden, wird eine initiale Spannung  $\sigma_0^e$  als Volumskraft aufgebracht (siehe Abb. 4).
4. Überschreitet die Spannung zusätzlich die Fließgrenze, wird eine zusätzliche, aus dem nichtlinearen Materialgesetz berechnete, initiale Spannung  $\sigma_0^p$  aufgebracht.

Die Punkte 2-4 werden so lange durchgeführt, bis der Einfluss der Volumskräfte unter eine vorgegebene Toleranzgrenze gesunken ist [2].

## 2.3 Sequentieller Aushub

Der Prozess des sequentiellen Vortriebs im Tunnelbau wird mit der FEM simuliert, indem jene Elemente, welche das Aushubmaterial beschreiben, schrittweise deaktiviert werden. Unter dem Einfluß eines Primärspannungsfeldes und der Deaktivierung von Elementen entsteht ein Ungleichgewicht an der Aushubsfläche. Durch Aufbringen von Aushubkräften wird das

Gleichgewicht wieder hergestellt und die Lösung für das Verschiebungsfeld gefunden. In der FEM werden Aushubkräfte an den Knoten aufgebracht während in der BEM Randspannungen aufgebracht werden.

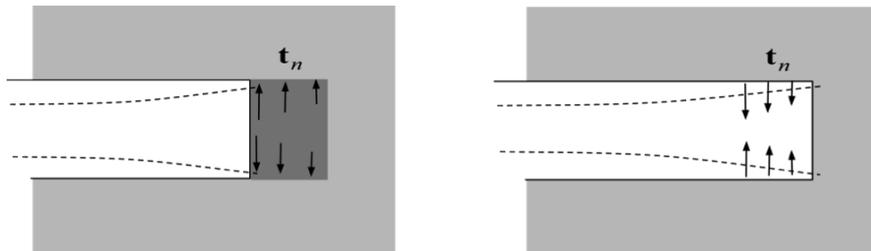


Abbildung 5: Simulation eines sequentiellen Vortriebs mit der BEM

Das linke Bild in Abb. 5 zeigt den Tunnel vor dem nächsten Aushubschritt. Aufgrund der bekannten Randbedingungen können die Spannungen im Inneren des Gebietes berechnet werden. Für den nächsten Abschlag, wie im rechten Bild gezeigt, muss das Randelementenetz um den Bereich der neuen Aushubfläche erweitert werden [3]. Die zuvor berechneten inneren Spannungen werden als Randspannungen  $t_n$  in die entgegengesetzte Richtung aufgebracht.

### 3 NUMERISCHER AUFWAND

#### 3.1 Komplexität

Die Reduktion des Problems auf den Rand resultiert, wie in Kap. 1 beschrieben, in einem Oberflächennetz mit einer um eine Ordnung geringeren Anzahl an Freiheitsgraden. Allerdings weist die BEM gegenüber der FEM eine erhöhte numerische Komplexität auf. Die Systemmatrizen in Gl. 4 sind unsymmetrisch und voll besetzt. Hieraus resultiert ein asymptotisch quadratischer Speicher- und Rechenaufwand von  $\mathcal{O}(n_{\text{BEM}}^2)$  bei  $n_{\text{BEM}}$  Freiheitsgraden. Im Gegensatz dazu steht das FEM-Gleichungssystem mit symmetrischen, spärlich besetzten Matrizen sowie einem asymptotisch linearem numerischen Aufwand  $\mathcal{O}(n_{\text{FEM}})$ . Das bedeutet, dass bei steigender Problemgröße und konstant gehaltenem Freiheitsgradverhältnis  $n_{\text{BEM}}/n_{\text{FEM}}$  der numerische Aufwand für BEM im Vergleich zu FEM größer werden kann.

#### 3.2 Schnelle BEM mit “Hierarchischen Matrizen”

Dies motiviert die Verwendung so genannter „Schneller Methoden“. Hier macht man sich die Tatsache zu Nutze, dass das mathematische Modell mehreren Ungenauigkeiten bzw. Fehlern unterliegt: komplizierte Geometrien werden mit einfachen Elementen diskretisiert, die verwendete Kollokationsmethode für das BEM-Gleichungssystem erfüllt die Gleichung nur in einer endlichen Anzahl an Punkten, die Auswertung der Integrale unterliegt einem numerischen Fehler und auch der nichtlineare Algorithmus wird bei einer gewählten Toleranzgrenze abgebrochen.

Man versucht nun die Matrizen in Gl. 4 mit derselben Fehlerordnung zu approximieren und das Gleichungssystem selbst mit einem zulässigen Fehler zu lösen. Die Approximation der Systemmatrizen kann mit „Hierarchischen Matrizen“ [4] bewerkstelligt werden. Hierbei werden die auftretenden Systemfreiheitsgrade aufgrund geometrischer Information so umsortiert („Clustering“), dass die Systemmatrix in Blöcke aufgeteilt werden kann. Über ein Zulässigkeitskriterium

$$\min\{\text{diam}(B_r), \text{diam}(B_c)\} \leq \text{dist}(B_r, B_c) \quad (5)$$

wird bestimmt, ob der dazugehörige Matrixblock Kandidat zur Komprimierung ist.  $B_r$  bzw.  $B_c$  bezeichnen einen Zeilen- bzw. Spalten-Cluster von Freiheitsgraden der Systemmatrix, deren geometrischer Durchmesser bzw. Abstand zueinander gemessen wird. Die Komprimierung erfolgt durch eine ungenaue Faktorisierung von zulässigen Matrixblöcken mit Niedrigrangmatrizen. Während z.B. ein voll aufgestellter, quadratischer Matrixblock  $M$   $m^2$  Einträge besitzt, reduziert sich dies bei Niedrigrangmatrizen  $R_k$  auf  $2k \cdot (m + m)$ . Der Rang  $k$  soll dabei um Größenordnungen kleiner sein als die Anzahl der Spalten oder Zeilen des zu komprimierenden Matrixblocks. Die ungenaue Faktorisierung des Matrixblocks erfolgt rekursiv mittels adaptiver Kreuzapproximation (ACA), wobei die Genauigkeit a priori vorgeschrieben werden kann.

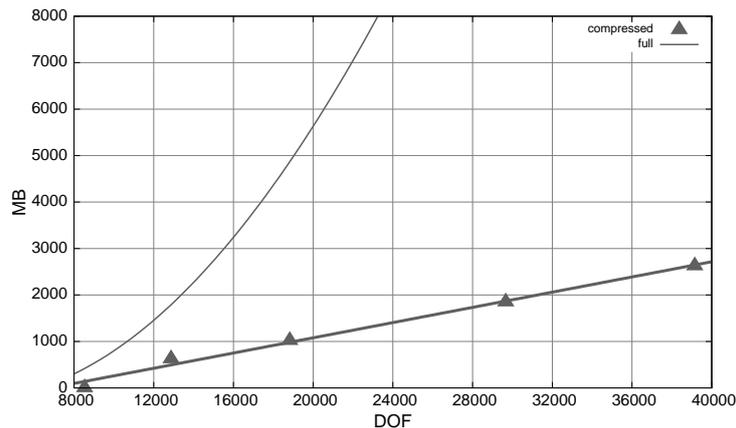


Abbildung 6: Speicherbedarf von  $U$  in Abhängigkeit von Freiheitsgraden (DOF)

Mit dieser Methode wird der Aufwand zur Berechnung und Speicherung der BEM-Systemmatrizen auf fast lineare Komplexität  $\mathcal{O}(n \log n)$  reduziert. Abb. 6 zeigt den fast linear anwachsenden Speicherbedarf in Abhängigkeit der Freiheitsgrade am Beispiel der Systemmatrix  $U$  aus Gl. 4 verglichen mit dem Speicheraufwand für die voll aufgestellte Matrix. Die Rechenzeit für das Aufstellen der Matrix verhält sich qualitativ in selber Weise.

## 4 BEISPIELE

### 4.1 2D Beispiel mit geologischem Einschluss und Felsanker

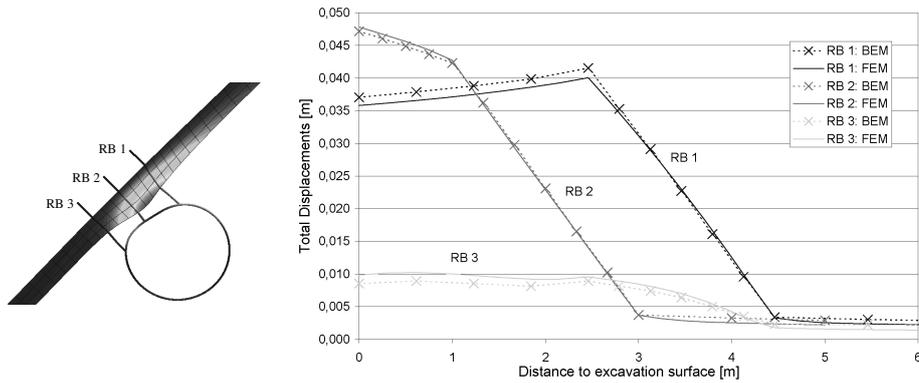


Abbildung 7: Testbeispiel: Tunnel mit geologischem Einschluss und Felsankern

Abb. 7 zeigt eine Simulation eines Tunnelaushubs in einem heterogenen Baugrund mit Felsanker. Die Simulationsergebnisse von BEFE++ werden mit Ergebnissen des FEM Programms PLAXIS verglichen. Das Verhältnis der Elastizitätsmodule von Einschluss, Fels und Felsanker ist 1 : 1000 : 20000. Abb. 7 zeigt eine gute Übereinstimmung der Ergebnisse.

### 4.2 3D Tunnelvortrieb

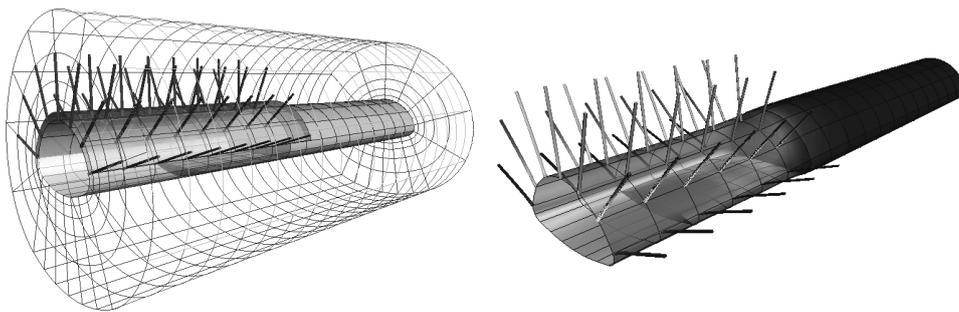


Abbildung 8: 3D Tunnelnetz mit Konturplot der Verformung

Abb. 8 links zeigt das 3D Netz eines sequentiellen Tunnelvortriebs mit Volumenzellen zur Berücksichtigung der nichtlinearen Effekte. Für den Fels wurde ein nichtlineares Materialmodell mit einer assoziierten Fließregel nach Drucker-Prager gewählt. Bei der Simulation wurden parallel zum Aushub Felsanker und Rohrschirm sequentiell eingebaut. Rechts in

Abb. 8 ist ein Konturplot mit Ergebnissen der Verformung an der Tunneloberfläche sowie entlang der Felsanker dargestellt, wobei die Zellen ausgeblendet sind. Abb. 9 zeigt die vertikale Verformung der Firste in Abhängigkeit des Vortriebes für die Aushubschritte 2 bis 7.

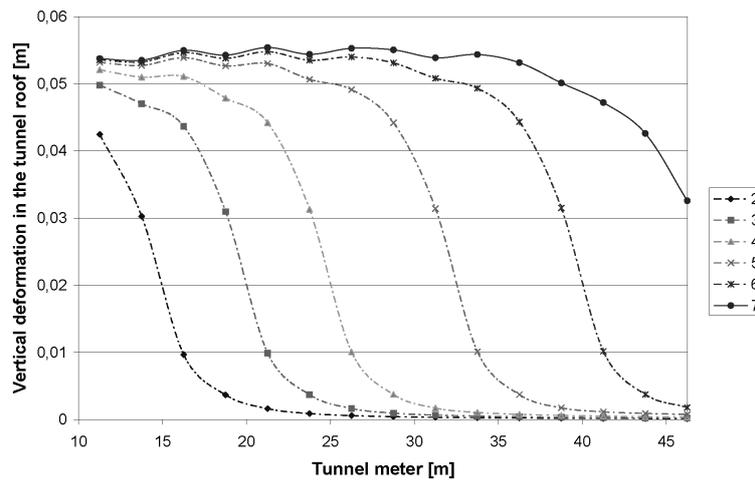


Abbildung 9: Vertikale Verformung der Firste für plastisches Gebirgsverhalten und Felsankerung

## LITERATUR

- [1] Beer, G.; Smith, I.; Duenser, Ch.  
The Boundary Element Method with Programming  
Springer WienNewYork, 2008.
- [2] Riederer, K.; Duenser Ch.; Beer G.  
Simulation of linear inclusions with the BEM  
Engineering Analysis with Boundary Elements, Nr. 33, 2009, S. 959-965
- [3] Duenser, Ch.; Lindner, B.; Beer, G.  
Simulation of Sequential Tunnel Excavation/Construction with the Boundary Element Method  
In: Meschke G.; Beer G.; Eberhardsteiner, J., Hartmann, D.; Thewes, M., Herausgeber  
Computational Methods in Tunnelling, Volume 1, 2009, S. 147-154
- [4] Zechner, J.; Beer G.  
Accelerated calculations of nonlinear problems in tunnelling with hierarchical matrices applied to the boundary element method.  
In: Meschke G.; Beer G.; Eberhardsteiner, J., Hartmann, D.; Thewes, M., Herausgeber  
Computational Methods in Tunnelling, Volume 2, 2009, S. 1023-1030