

Zur Ermittlung von Spielzeiten – Teil II

Erweiterter Monte-Carlo-Algorithmus für Regalbediengeräte mit Mehrfachlastaufnahmemitteln entwickelt



Foto: IGW/Logistics

Dirk Jodin, Christian Langschützer, Simon Gasperin

Mit dem am Institut für Technische Logistik (ITL) der Technischen Universität Graz entwickelten erweiterten Monte-Carlo-Algorithmus können beliebige Rundreiseprobleme der Logistik gerechnet werden. Voraussetzung ist, dass die nötigen Dichtefunktionen respektive deren Zufalls-generatoren für die Realisierung realer Bedienzustände bekannt und die Strategien definiert sind. Das Verfahren ist in nahezu alle Computer-algebrasysteme integrierbar und damit zukunftssicher.



Univ.-Prof. Dr.-Ing. D. Jodin leitet das Institut für Technische Logistik der Technischen Universität Graz.



C. Langschützer ist Wissenschaftlicher Assistent am Institut für Technische Logistik der Technischen Universität Graz.



S. Gasperin ist Wissenschaftlicher Assistent am Institut für Technische Logistik der Technischen Universität Graz.

Für die Demonstration der Rechenmethode an einem Lager mit Mehrfachlastaufnahme wird ein automatisiertes Regallager betrachtet, dessen Regalfront eine Breite B von 11 m und eine Höhe H von 17,2 m hat. Die Fächer selbst sind 0,5 m breit und 0,4 m hoch. Das Regalbediengerät ist mit vier Lastaufnahmemitteln ausgestattet. **Bild 1** zeigt das zu untersuchende Lagersystem.

Beim Beginn des Einlagervorgangs befinden sich die Lastaufnahmemittel am E/A-Punkt. In diesem Ausgangszustand sind die vier Lastaufnahmemittel mit jeweils einer

Einlagereinheit beladen. Ausgehend von dieser Position, bewegen sich die Lastaufnahmemittel zu den in Bild 1 rot markierten Einlagerpositionen (E1-E4), an denen jeweils eine Lagereinheit eingelagert wird. Die Definition der Koordinaten der einzelnen Einlagerpositionen geschieht durch die Strategie aufsteigender x-Koordinaten. Dadurch ist eine auf- und absteigende Bewegung bei der Einlagerungsfahrt möglich. Von der letzten Einlagerposition ausgehend, beginnt der Auslagervorgang. Die in Bild 1 grün markierten Auslagerpositionen (A1-A4) werden angefahren und jeweils eine Lagereinheit ausgelagert. Diese Auslagerpositionen haben die Strategievorgabe fallender x-Koordinaten. Neben dieser Strategie sind weitere sinnvolle Heuristiken (u. a. die Streifenstrategie oder die Briefumschlagsheuristik) in das Berechnungsverfahren integrierbar. Abschluss des Auslagervorgangs ist die Bewegung des Regalbediengeräts zum E/A-Punkt, an dem gleichzeitig die auszulagernden Lagereinheiten abgegeben und neue Einlagereinheiten aufgenommen werden.

Mithilfe der Wegzeitgleichungen (s. F+H 10/2010, S. 365) lassen sich nun alle Wegzeiten t_w für eine derartige Rundfahrt berechnen. Die ganze Spielzeit t_{Spiel} definiert sich somit durch die Wegzeiten t_w der Ein- und Auslagerung, den jeweiligen Ein- und Auslagerzeiten t_{ein} bzw. t_{aus} an den Lagerfächern und der Umlagerzeit t_{EA} am E/A-Punkt. Nachfolgend ist die diesbezügliche Gleichung der ganzen Spielzeit t_{Spiel} aufgeführt, die ein Arbeitsspiel (Rundfahrt) des Regalbediengeräts beschreibt:

$$t_{Spiel} = \sum_{i=1}^{2 \cdot C+1} t_w + C \cdot t_{ein} + C \cdot t_{aus} + t_{EA} \quad (10)$$

Diese Wegzeitgleichung wird in das Computeralgebrasystem (CAS) implementiert. Das Programm erzeugt mithilfe gleichverteilter Zufallsgeneratoren reale Bedienzustände (Ein- und Auslagerkoordinaten) innerhalb der Lagerfläche, die mit der integrierten Wegzeitgleichung (s. Gleichungen 7-9 in Teil I der Serie) abgearbeitet werden. Dadurch ist das Programm in der Lage, beliebig viele ganze Spielzeiten t_{Spiel} zu berechnen und daraus Datenreihen zu bilden. Werden diese Datenreihen in Form eines Punktdiagramms aufgetragen, bilden sie Wertewolken der Spielzeiten. **Bild 2** zeigt eine Wertewolke, bestehend aus 35 000 derart berechneten Spielzeiten t_w . Aus dieser Wertewolke lässt sich u. a. der laufende Mittelwert der kompletten Spielzeiten t_{Spiel} nach Gleichung 11 berechnen (**Bild 3**).

$$\frac{1}{i} \sum_{i=1}^i t_{Spiel} \quad (11)$$

In Bild 3 ist, mit sich vergrößernder Stichprobenmenge, ein stochastisch konvergenter Verlauf zu beobachten wie auch bei allen anderen durchgeführten Rechenläu-

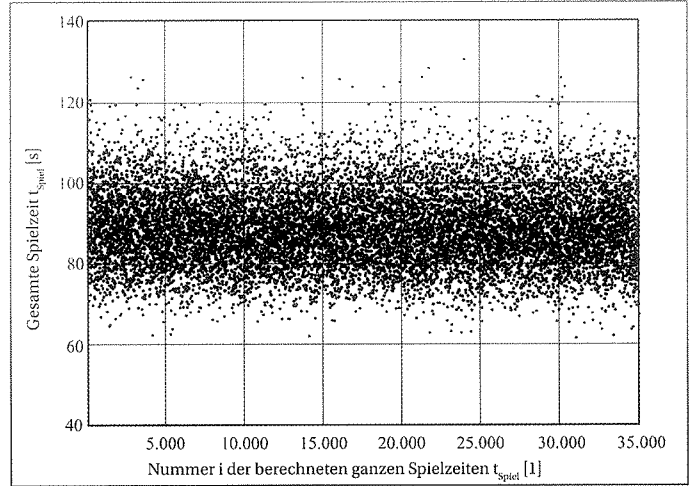
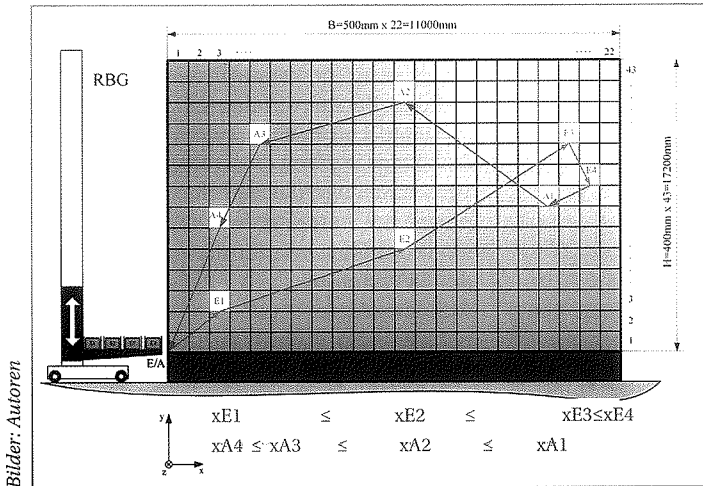


Bild 1: Skizze der zu untersuchenden Lagerkonfiguration

Bild 2: Wertewolke von 35 000 berechneten ganzen Spielzeiten t_{Spiel_i}

fen. Nur die Wertewolke und der Mittelwertverlauf (Bild 2 und 3) haben ein individuelles Aussehen.

Abbruchkriterien

Ausgehend von dieser Erkenntnis lässt sich das Abbruchkriterium der Konvergenz definieren. Hierbei wird die Differenz zwischen zwei laufenden Mittelwerten berechnet, für die gilt $i > 2000$ und zwischen denen in diesem konkreten Beispiel 1000 Einzelwerte liegen müssen. Der Grund hierfür liegt in der Kombinationsmöglichkeit einer Konvergenzüberprüfung mit einer zusätzlichen Trendkontrolle. Die Festlegung auf eine Differenzbildung zwischen 1000 Werten, folgt durch die Beobachtung lokaler Trends des laufenden Mittelwerts (Gleichung 11) in der Größenordnung von ebenfalls 1000 Werten. Die maximal zulässige Differenz wird auf den Wert von 0,1 s festgelegt. Hierdurch folgt das Abbruchkriterium der Konvergenz zu:

$$\left| \frac{1}{i} \sum_{j=2000}^i t_{Spiel_j} - \frac{1}{i-1000} \sum_{j=2000-1000}^{i-1000} t_{Spiel_j} \right| \leq \frac{1}{10} s \quad (12)$$

Der in Bild 3 dargestellte laufende Mittelwert erfüllt diese Abbruchbedingung der Konvergenz. Bei erneuter Durchführung der Monte-Carlo-Rechnung an demselben

System wird eine Konfidenz des Mittelwerts (streuender Mittelwert) beobachtet. Mit den Prämissen einer unbekanntem Verteilung, eines unbekanntem Erwartungswerts μ und einer unbekanntem Varianz σ^2 folgt nach [6] der Unsicherheitsbereich (das Konfidenzintervall) des Erwartungswerts zu:

$$\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \quad (13)$$

Konfidenzamplitude Konfidenzamplitude

Mit \bar{X} als arithmetischen Mittelwert der Stichprobe, S als Standardabweichung, n als Stichprobenmenge und $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ als Quantil der Standardnormalverteilung (ausgehend vom Zentralen Grenzwertsatz). Auf die Spielzeiten t_{Spiel_i} des Lagersystems übertragen, ergibt sich die Konfidenzamplitude des Konfidenzintervalls zu:

$$z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (t_{Spiel_i} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_{Spiel_i})^2} \quad (14)$$

Das $\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$ -Quantil ergibt für ein Signifikanzniveau von 95 Prozent den approximativen Wert von 1,96. Mit einer maximal zulässigen Konfidenzamplitude

von 0,1 s folgt das Abbruchkriterium der Konfidenz zu:

$$1,96 \cdot \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (t_{Spiel_i} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_{Spiel_i})^2} \leq 0,1s \quad (15)$$

Bild 4 zeigt den laufenden Mittelwert der ganzen Spielzeiten mit seinem zugehörigen Konfidenzintervall (grauer Bereich).

Beide Abbruchkriterien sind bei einer Stichprobenmenge von 35000 Spielen erfüllt. Die Rechenzeit für das Erzeugen dieser Stichprobenmenge beträgt mit einem Standard-PC 15 s. Die Unsicherheiten bezüglich der Konvergenz und der Konfidenz addieren sich bezüglich der Approximation des Erwartungswerts auf, sodass eine komplette Schwankungsbreite (komplette Unsicherheit) von 0,2 s erreicht wird.

Diese Unsicherheiten lassen sich durch eine Verschärfung der zugehörigen Abbruchkriterien, stark verringern. Natürlich erhöhen sich dadurch auch die ganze Approximationsgüte und die Berechnungsdauer.

Durchsatzberechnung und Verteilung der Spielzeiten

Für den approximativen Erwartungswert der ganzen Spielzeiten $E(t_{Spiel_i})$ folgt, unter

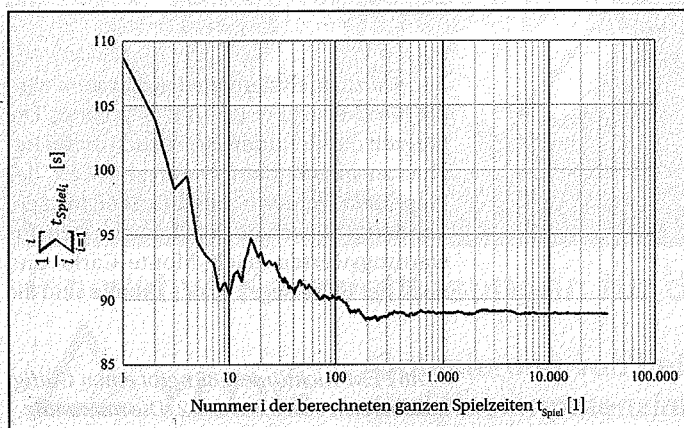


Bild 3: Laufender Mittelwert $\frac{1}{i} \sum_{j=1}^i t_{Spiel_j}$ der ganzen Spielzeiten

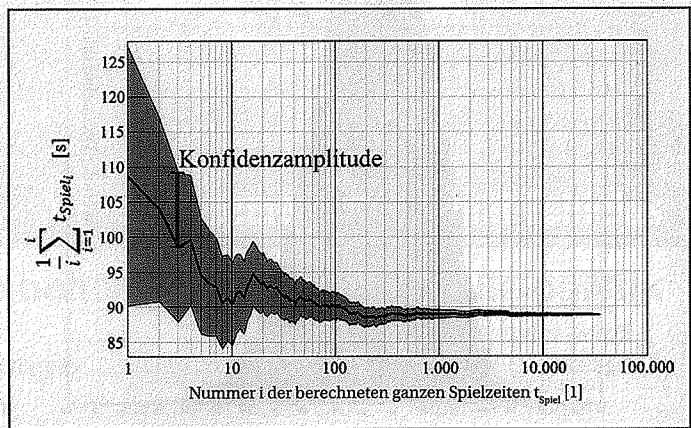


Bild 4: Konfidenzintervall des laufenden Mittelwerts

Systemparameter

Geometrische Parameter	Kinematische Parameter
Flächenbreite B: 11 m Flächenhöhe H: 17,2 m Breite eines Faches: 0,5 m Höhe eines Faches: 0,4 m	$v_x: 1,3 \text{ m/s}$ $v_y: 2,032 \text{ m/s}$ $b_x: 1 \text{ m/s}^2$ $b_y: 1 \text{ m/s}^2$
	Wandparameter
Effektive Flächenbreite $B_{\text{Effektiv}}: 10,75 \text{ m}$	$w = \frac{v_x}{v_y} \cdot \frac{H_{\text{Effektiv}}}{B_{\text{Effektiv}}} = 1$
Effektive Flächenhöhe $H_{\text{Effektiv}}: 16,8 \text{ m}$	
Monte-Carlo-Spielzeitrechnung	FEM-Regel 9.851 (1978)
Erwartungswert der Spielzeiten bei 100 000 berechneten Spielen	Wegzeit der Rundreise über die repräsentativen Fächer P und P'
$E(t_{\text{Spiel}}) = 20,316 \text{ s} \pm 0,03 \text{ s}$	$E(t_{\text{Spiel}}) = 20,247 \text{ s}$

Quelle: Autoren

Anwendung der Gleichung 5 (s. F+H 10/2010) und der definierten Unsicherheiten, folgendes Ergebnis:

$$E(t_{\text{Spiel}}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_{\text{Spiel}_i} \pm \frac{2}{10} s = 88,8 \text{ s} \pm \frac{2}{10} s$$

Nachfolgend ist die angewandte Gleichung des Durchsatzes λ , mit berücksichtigter Approximationsgüte, dargestellt:

$$\lambda = \frac{3.600 \frac{s}{h}}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_{\text{Spiel}_i} \pm \frac{2}{10} s} \cdot 8 \frac{LE}{\text{Spiel}} = \frac{3.600 \frac{s}{h}}{88,8 \text{ s} \pm \frac{2}{10} s} \cdot 8 \frac{LE}{\text{Spiel}} = \left[323,6 \frac{LE}{h} \text{ bis } 325,1 \frac{LE}{h} \right] \quad (16)$$

Die Beobachtung der Verteilung der berechneten Spielzeiten findet mithilfe des in **Bild 5** gezeigten Histogramms statt. Im Histogramm ist eine Asymmetrie der Spielzeiten dieses Lagers feststellbar. Das logarithmisch-normalverteilte Modell (s. orange Dichtefunktion in Bild 5) bildet zwar diese Asymmetrie ab, wird jedoch vom χ^2 -Anpassungstest bei einem Signifikanzni-

veau von fünf Prozent verworfen. Nach [7] ist ein Signifikanzniveau von fünf Prozent der strengste Standard in wissenschaftlichen Arbeiten. Das logarithmisch-normal verteilte Modell ist deshalb nur bedingt für die Beschreibung dieser und weiterer herangezogener Pseudostichproben geeignet.

Anwendung des modifizierten Algorithmus für Doppelspiele mit einem Einfach-LAM

Um das entwickelte Berechnungsverfahren überprüfen zu können, werden jene Regalbediensysteme betrachtet, für die anerkannte Rechnormen [8] für die ganzen Wegzeiten vorliegen. Dabei handelt es sich um Standard-Regalbediengeräte mit einem Doppel- oder Einzelspiel, bei dem nur eine Ein- und eine Auslagerkoordinate angefahren werden. Die FEM-Regel löst das Rundreiseproblem auf exakt analytischem Wege, ohne Vereinfachung der Geschwindigkeitsverläufe. Nur der Diskretisierungsfehler lässt sich in diesen Herleitungen (aufgrund von Integrationen) nicht vermeiden. Durch diese exakte analytische Herleitung

des Erwartungswerts der Wegzeiten, bildet die FEM-Regel 9.851 (1978) eine stark vertrauenswürdige Vergleichsbasis zum Monte-Carlo-Rechenverfahren. Das entwickelte automatische Rechensystem wird nun auf ein gültiges System dieser Regel angewandt. Verwendet wird das berechnete System mit nur einem Lastaufnahmemittel. Eine weitere Voraussetzung für die Anwendbarkeit der Berechnung nach FEM ist ein Regalwandparameter w mit dem Wert eins*, der nach folgender Gleichung definiert ist:

$$w = \frac{v_x}{v_y} \cdot \frac{H}{B} \quad (17)$$

Die Größen v_x und v_y sind hierbei die Maximalgeschwindigkeiten in x- und y-Richtung. Ein Regalwandparameter mit dem Wert 1 wird bei diesem Lagersystem durch eine geeignete Wahl des Verhältnisses v_x/v_y erreicht. Wie beim System mit Mehrfachlastaufnahme werden die Wegzeitgleichungen ermittelt, in das CAS integriert und per gleichverteilter Zufallsgeneratoren Pseudostichproben der Rundreisen generiert. Um möglichst geringe Unsicherheitsbereiche zu realisieren, werden 100 000 Spiele gerechnet, wodurch sich eine komplette Schwankungsbreite (Unsicherheit der Konvergenz plus Konfidenz) von 0,03 s ergibt. Diese verbesserte Approximationsgüte demonstriert ebenfalls die zuvor angesprochene Verringerung der Unsicherheiten durch Erhöhung der Stichprobenmenge.

Im nächsten Schritt wird der Erwartungswert der Spielzeit dieses Systems mithilfe der FEM-Regel berechnet. Im Falle eines Wandparameters von eins entspricht der Erwartungswert der ganzen Wegzeit eines Spiels jener ganzen Wegzeit, bei der die repräsentativen Fächer P und P' an der Lagerfläche hintereinander angefahren werden. Für diese repräsentativen Fächer gibt die Regel folgende Koordinaten an:

$$P(x_p; y_p) = P\left(\frac{1}{5}B; \frac{2}{3}H\right) \quad (18)$$

und

$$P'(x_p; y_p) = P\left(\frac{2}{3}B; \frac{1}{5}H\right) \quad (19)$$

Für das zu analysierende Lagersystem wird die Rundreise über P und P' berechnet. Die Wegzeit dieser Rundreise ist nach dieser Rechnorm mit dem Erwartungswert der Wegzeiten identisch. Anschließend folgt ein Vergleich zwischen den berechneten Erwartungswerten nach Monte-Carlo und nach der FEM-Regel. In der **Tabelle** sind die

* Die FEM-Richtlinie 9.851 gibt einen Gültigkeitsbereich von $0,5 < w < 2$. Die maximale Genauigkeit wird aber nur bei $w = 1$ erreicht.

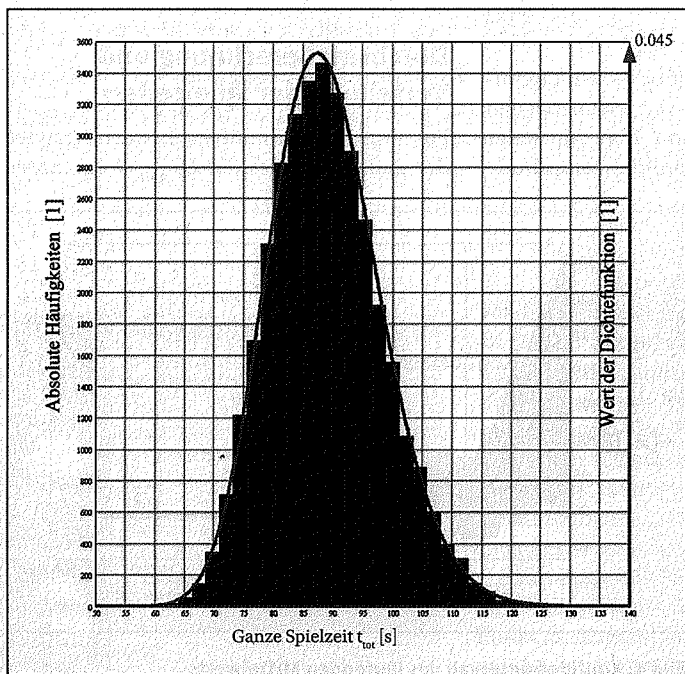


Bild 5: Histogramm der Pseudostichprobe und Dichtefunktion des logarithmisch-normalverteilten Modells

verwendeten Systemdaten und Ergebnisse dieses Vergleichs zusammengefasst.

Ohne Mitberücksichtigung der kompletten Schwankungsbreite, wird eine Differenz von 0,3 Prozent festgestellt. Bei Mitberücksichtigung ergibt sich eine maximale Differenz von 0,5 Prozent. Als mögliche Ursache der Differenzen zwischen den Ergebnissen, wird der auftretende Diskretisierungsfehler in der FEM-Regel vermutet. Insgesamt lässt sich aufgrund der geringen Abweichungen von dieser anerkannten Spielzeitberechnung, das hier vorgestellte modifizierte Monte-Carlo-Rechenverfahren als sehr vertrauenswürdig einstufen.

Fazit und Ausblick

Der erweiterte Monte-Carlo-Algorithmus hat sich als durchaus praxistaugliches Rechenverfahren bestätigt. Unter Einhaltung der Abbruchkriterien lässt sich bei Variation des Stichprobenumfangs die gewünschte Genauigkeit der Ergebnisse beeinflussen. Diese einstellbare Genauigkeit ermöglicht einerseits Planungsrechnungen und andererseits Vergleichsrechnungen fein abgestufter Systemvarianten. Durch die Verwendung von Abbruchkriterien wird nur mit nötigen Stichprobenmengen gerechnet. Bezüglich des beschriebenen Lagersystems, können mit 35 000 berechneten Spielen Rechenunsicherheiten von weniger als $\pm 0,2$ s sichergestellt werden. Die Rechenzeit für das Erzeugen der Pseudostichprobe mit dieser Stichprobenmenge beträgt mit einem Standard-PC etwa 15 s.

Ein weiterer Vorteil dieses Rechenverfahrens liegt in der großen Informationsausbeute. Die stochastische Betrachtung des Lagersystems ermöglicht, neben der approximativen Erwartungswertrechnung, die

komplette statistische Analyse der erzeugten Pseudostichprobe. Im Bereich der statistischen Analyse wird für das betrachtete Lagersystem die stochastische Verteilung mithilfe von Histogrammen beobachtet. Der Versuch der stochastischen Verteilung eine stetige Verteilung zuzuordnen, führt zum logarithmisch-normalverteilten Modell des Systems. Dieses Modell wird jedoch vom χ^2 -Anpassungstest bei einem Signifikanzniveau von fünf Prozent verworfen, wodurch sich die Logarithmische-Normalverteilung nur unter Vorbehalt anwenden lässt.

Eine wichtige Erweiterung gegenüber den bekannten Berechnungsverfahren liegt in der Möglichkeit, Rundfahrten mit Mehrfachlastaufnahmemitteln zu berechnen. Hierzu müssen nur die Weggleichungen der Rundtour inklusive der Fahrstrategie entwickelt und implementiert werden.

Der Vergleich dieses Rechenverfahrens mit anerkannten Rechennormen führt zu unbedeutenden Abweichungen von unter einem halben Prozent. Dadurch bestätigt sich die Vertrauenswürdigkeit des neu entwickelten Rechenverfahrens.

Zukünftig ist der Einsatz dieses Rechenverfahrens für eine breit angelegte Leistungs- und Vergleichsrechnung aktueller und zukünftiger Systeme vorstellbar. Die Anwendung der Monte-Carlo-Methode ist keinesfalls auf diese, im vorliegenden Fachaufsatz behandelten Systeme beschränkt. Es können ein- und mehrachsige Regalbediengeräte, unabhängig von deren konstruktiver Ausführungsform, berechnet werden. Hierbei ändern sich nur die Weggleichungen und nicht die theoretischen Grundlagen des Rechenverfahrens. Ebenso lassen sich Spielzeiten bei einer Gruppierung von Artikeln, durch gleichverteilte Zu-

fallsgeneratoren innerhalb einer Zonung, aber auch für mehrere Zonen ermitteln. Die Berechnung kompletter Rundfahrten im kompletten Lager ist ebenfalls möglich. Hierfür müssen die Lagerflächen selbst und die Beziehungen zwischen diesen Lagerflächen in das Rechenprogramm integriert werden. In weiteren Bereichen der Technischen Logistik finden sich ebenfalls kompatible Systeme für diese Rechenform. Als Beispiel sei ein Portalkran mit zwei unabhängigen Bewegungsmöglichkeiten genannt.

Im aktuellen Entwicklungszustand lässt sich das Rechensystem auf komplett freie Lagerflächen anwenden. Die Ergebnisse gelten daher nur für einen Füllgrad von null. Die vorgesehene Implementierung des Füllgrads als zusätzlichen Parameter, wird den Realitätsgrad weiter erhöhen und dieses Rechenverfahren zu einer wirksamen Alternative zu vorhandenen Simulationsprogrammen machen. Die Berechnungsmethode ermöglicht des Weiteren eine Regressionsanalyse zur Berechnung des Durchsatzes bezüglich unterschiedlicher Parameter. **(Ende)**

Literaturhinweise:

[6] Genschel, U.; Becker, C.: *Schließende Statistik. Grundlegende Methoden.* Springer-Verlag, Berlin, 2005

[7] Büchtem, A.; Henn, H.-W.: *Elementare Stochastik. Eine Einführung in die Mathematik der Daten und des Zufalls.* Springer-Verlag, Berlin, 2007

[8] N. N.: *FEM-Regel 9.851. Leistungsnachweis für Regalbediengeräte. Spielzeiten.* 1978

www.itl.tugraz.at

Zum besseren Verständnis sind die Formeln und die Literaturhinweise der Beiträge Teil I und Teil II fortlaufend nummeriert
Teil I des Beitrags ist in F+H 10/2010 erschienen



• zuverlässig
• schnell
• flexibel

AIV – Autonomous Intelligent Vehicles

Innovative Komplettlösungen für die behälterbasierte Kleinteilelogistik



Optimierung von Leistungs- und Kostenpotenzialen

YLOG GmbH
Liebochstraße 9
A-8143 DOBL bei GRAZ

Fon +43(0)3136-20022
Fax +43(0)3136-20022-15
Mail office@ylog.at
<http://www.ylog.at>

Weitere Informationen www.vfv1.de/#19509660